

Lezione del 13 settembre 2021

L'obiettivo del corso di fisica tecnica è quello di **studiare la conversione dell'energia e l'interazione energia-materia**, per fornire all'uomo energia nelle forme necessarie. Esistono alcuni esempi di conversione dell'energia, uno di questi prevede la **conversione di calore in energia meccanica o elettrica (motori)**. Un altro esempio è la **trasformazione dell'energia elettrica in calore (frigoriferi e pompe di calore)**. Infine vi è un ulteriore esempio di trasformazione che prevede la **conversione della radiazione solare in calore**. Un altro argomento che andremo ad approfondire è la **trasmissione del calore**, in particolare le dispersioni termiche di un sistema o edificio **ed il raffreddamento** di dispositivi meccanici o elettronici.

La termodinamica studia macroscopicamente un sistema soggetto a scambi di energia. La trasmissione del calore, invece, studia il trasporto dell'energia dovuta a differenze di temperatura.

In questo corso faremo riferimento ad un **sistema termodinamico semplificato esente da reazioni nucleari, chimiche e da azioni elettromagnetiche, ma soggetto a scambi di massa, calore e lavoro**. Il lavoro (J) indica il **trasferimento di energia di tipo meccanico e non è una funzione di stato**, ovvero il suo valore non dipende solamente dai diversi stati del sistema ma anche dal "percorso". Il calore (J) indica il trasferimento di energia di tipo termico e anche esso non è una funzione di stato.

Esistono tre tipologie di **sistemi**: **semplici** (non esistono pareti all'interno), **composti** (esistono pareti all'interno) ed **isolati** (esistono pareti esterne chiuse ad ogni scambio). A loro volta esistono sei diverse tipologie di pareti.

Pareti		
Massa	Lavoro	Calore
Impermeabili	Rigide	Adiabatiche
Porose	Mobili	Diatermiche

Le grandezze termodinamiche si dividono in **grandezze intensive ed estensive**.

Grandezze Intensive		
T	Temperatura, K	Potenziale di interazione termica
P	Pressione, Pa	Potenziale di interazione meccanica
μ	Potenziale Chimico, J/mol	Potenziale di interazione chimica
Grandezze Estensive (se divise per la massa m o n, diventano "specifiche")		
m	Massa, kg	Massa
n	Numero di moli, mol	Numero di moli
V	Volume, m ³	Volume del sistema
E _C	Energia Cinetica, J	Associata alla velocità macroscopica del sistema. È funzione di stato
E _P	Energia Potenziale, J	Associata alla posizione nel campo gravitazionale. È funzione di stato
U	Energia Interna, J	Energia cinetica dei costituenti della materia. È funzione di stato

La termodinamica, attraverso l'**introduzione dell'energia interna**, ha permesso di **completare la "teoria meccanica" relativa agli scambi di energia**.

$$L = \Delta E_p + \Delta E_C + \Delta U = \cancel{\Delta E_p} + \cancel{\Delta E_C} + \Delta U \rightarrow L = \Delta U$$

Un **sistema semplice** si dice in equilibrio termodinamico se le grandezze intensive (T, P e μ) hanno un valore uguale in tutti i punti del sistema. Esso è macroscopicamente caratterizzato conoscendo i valori di U, V ed m. **Le grandezze intensive possono essere definite e misurate solo se il sistema è in equilibrio**, poiché sono grandezze macroscopiche di tipo statistico. Qualora il sistema in esame non fosse in equilibrio termodinamico esso può essere suddiviso in sotto-sistemi sufficientemente piccoli da potersi considerare in equilibrio termodinamico. Tale principio viene chiamato "**principio dell'equilibrio locale**". **Due sistemi sono detti in mutuo equilibrio se caratterizzati da uguali valori di T, P e μ** . Logicamente un sistema composto è in equilibrio se lo sono mutuamente i sotto-sistemi semplici.

Non avendo a disposizione le grandezze intensive (T, P e μ) in tutti i punti del sistema durante una trasformazione reale viene utilizzata una **TIR (Trasformazione Internamente Reversibile)**, ovvero una successione di stati di equilibrio che meglio approssima la trasformazione reale subita dal sistema. Ciò significa che è sempre possibile definire le grandezze termodinamiche durante le TIR.

Si consideri una compressione tramite pistone in assenza di attrito: in tal caso, con una velocità del pistone intorno ai 3,0 m/s ed una velocità di propagazione della pressione stimata intorno ai 340,0 m/s, la pressione all'interno del cilindro è sempre omogenea. **In generale, quando la velocità di trasformazione è nettamente minore rispetto alla velocità di propagazione della perturbazione la TIR viene considerata affidabile e quindi molto simile alla realtà**. Quando invece la velocità di trasformazione è confrontabile con la velocità di propagazione della perturbazione allora la TIR non è più realistica. Questa possibilità si verifica, tra i tanti, in due casi: espansione libera di un gas, dove la velocità del gas è comparabile con la velocità di propagazione del ΔP , oppure nel caso di un sistema cilindro-pistone in presenza di attrito, dove la velocità del pistone è paragonabile alla velocità di propagazione del ΔT .

Non essendo nota una relazione fondamentale tale da "collegare" le grandezze termodinamiche e di descrivere il comportamento della materia, **vengono utilizzate tabelle, diagrammi delle proprietà termodinamiche ed equazioni di stato, ovvero approssimazioni semi-empiriche**.

Lezione del 15 settembre 2021

Conservazione della massa

In assenza di reazioni nucleari la massa si conserva. Per definire analiticamente il principio di conservazione della massa bisogna considerare un sistema generico con una determinata quantità di ingressi, una determinata quantità di uscite ed una massa. Viene definita “portata massica” la derivata temporale della massa (m), ovvero: $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \left[\frac{kg}{s} \right]$. Nel sistema in esame vi è un qualsiasi numero di portate in ingresso ed in uscita e siccome vige il principio di conservazione della massa, tutta la quantità inserita all'interno del sistema deve conservarsi. È assolutamente errato sostenere che ciò si verifichi semplicemente eguagliando la somma delle portate in ingresso con la somma delle portate in uscita. Al fine di ottenere un bilancio realistico è necessario considerare un parametro aggiuntivo che esprima l'accumulo di massa all'interno del sistema.

Equazione istantanea nel tempo (Sistema Generico) $\rightarrow \sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out} + \frac{\partial M}{\partial t}$, dove $M =$ Massa accumulata nel sistema

Considerando invece una situazione stazionaria, ovvero che non varia nel tempo, nessun termine dipende dalla variabile temporale (sono tutti costanti) e pertanto non vi è accumulo all'interno del sistema: ciò significa che la massa entrante coincide con la massa uscente. Un esempio molto semplice di situazione stazionaria è rappresentata da un tubo cilindrico avente un solo ingresso ed una sola uscita. Note le relative sezioni si può ottenere l'equazione rappresentativa della situazione stazionaria.

Equazione in condizioni stazionarie $\rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} \rightarrow \rho_{in} \omega_{in} A_{in} = \rho_{out} \omega_{out} A_{out}$, dove ω e ρ sono velocità e densità del fluido

$$\omega \cdot A = \text{Portata Volumetrica} = \left[\frac{m}{s} \cdot m^2 \right] = \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

È importante notare che, nota la velocità del fluido e la sezione del sistema in condizioni stazionarie, è possibile ottenere le proprietà del fluido a partire dall'equazione in condizioni stazionarie.

Primo principio della termodinamica – Sistema Generico

L'energia può subire diverse trasformazioni ma, in senso assoluto, essa si conserva. Per analizzare il principio di conservazione di energia bisogna considerare un generico sistema complesso avente, oltre ad almeno una portata di massa in entrata e in uscita ed una massa (M) accumulata al suo interno, uno o più dispositivi e/o pareti in grado di effettuare scambi di energia (lavoro, calore, ecc). Nella rappresentazione di tale sistema è fondamentale stabilire i versi di ogni grandezza. Il passaggio successivo è quello di attribuire un valore energetico specifico (e) alle masse considerate. Il valore energetico specifico (e) viene espresso mediante la seguente equazione: $e = u + e_p + e_c$. Rispettivamente i tre addendi al secondo membro rappresentano l'energia interna specifica, l'energia potenziale specifica e l'energia cinetica specifica.

$$e = u + e_p + e_c \rightarrow e = u + \frac{(m \cdot g \cdot z)}{m} + \frac{\left(\frac{1}{2} m \omega^2 \right)}{m} = u + g \cdot z + \frac{1}{2} \omega^2$$

Solitamente il valore energetico relativo alla massa in ingresso è diverso dal valore energetico relativo alla massa in uscita: spesso però capita che uno o più componenti dell'energia specifica (e) siano confrontabili tra loro. Un esempio è l'energia cinetica che, spesso, ha variazioni relativamente contenute. L'esatto opposto, invece, accade per l'energia interna che è strettamente correlata alla temperatura.

Per effettuare un'analisi dal punto di vista energetico di un generico sistema complesso è utile sfruttare la relazione tra la portata massica (\dot{m}) ed il valore energetico specifico (e). In particolare, il prodotto tra le due grandezze è uguale alla potenza: $\dot{m} \cdot e = \frac{kg}{s} \cdot \frac{J}{kg} = \frac{J}{s} = W = \text{Potenza } (\dot{E})$. È possibile differenziare due tipologie di potenza: termica e meccanica.

$$\text{Potenza } (\dot{E}) = \begin{cases} \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}, \text{Potenza Termica} \\ \dot{L} = \frac{dL}{dt}, \text{Potenza Meccanica} \end{cases}$$

N.B. Tutti i termini fino ad ora considerati possono variare in funzione del tempo: la massa in ingresso e/o in uscita, la massa accumulata, la potenza termica, la potenza meccanica e l'energia specifica.

Al fine di poter realizzare l'equazione del bilancio energetico di un sistema è utile seguire il procedimento svolto per la conservazione della massa, ovvero indicare al primo membro tutti i “parametri energetici in ingresso” ed al secondo membro le trasformazioni degli stessi.

$$\sum \dot{m}_{in} e_{in} + \sum \dot{E}(In) = \sum \dot{m}_{out} e_{out} + \sum \dot{E}(Out) + \frac{\partial (M \cdot e)}{\partial t}$$

L'equazione appena riportata rappresenta un qualsiasi sistema generico: è tuttavia opportuno analizzare anche sistemi specifici.

Primo principio della termodinamica – Sistema Chiuso

Un classico sistema chiuso è il cilindro-pistone. In generale, in un sistema chiuso avvengono scambi energetici con l'esterno ma non di massa. Per ottenere l'equazione rappresentativa di un sistema chiuso è possibile sfruttare l'equazione generica ricavata in precedenza.

$$\sum \dot{m}_{in} e_{in} + \sum \dot{E}(In) = \sum \dot{m}_{out} e_{out} + \sum \dot{E}(Out) + \frac{\partial(M \cdot e)}{\partial t} \rightarrow \mathbf{0} + \sum \dot{E}(In) = \mathbf{0} + \sum \dot{E}(Out) + \frac{\partial(M \cdot e)}{\partial t}$$

Il termine di accumulo, ovvero il terzo addendo al secondo membro dell'equazione, deve essere valutato in maniera opportuna: in particolare bisogna analizzare gli andamenti dei termini da cui esso dipende. La massa (M) essendo in un sistema chiuso non varia, al contrario della relativa energia (e). In particolare, la componente dell'energia che varia è l'energia interna (u).

$$\sum \dot{E}(In) = \sum \dot{E}(Out) + \frac{\partial(M \cdot e)}{\partial t} \rightarrow \sum \dot{E}(In) = \sum \dot{E}(Out) + M \frac{\partial e}{\partial t} \rightarrow \sum \dot{E}(In) = \sum \dot{E}(Out) + M \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \sum \dot{E}(In) = \sum \dot{E}(Out) + \frac{\partial U}{\partial t}, \text{ con } U = M \cdot u$$

$$\dot{E}(In) = \dot{E}(Out) + \frac{\partial U}{\partial t} \rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \dot{E}(In) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{E}(Out) \cdot dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt$$

$$\text{Forma Integrale} \rightarrow E_{In} + U_0 = E_{Out} + U_1$$

$$\text{Forma Specifica} \rightarrow e_{In} + u_0 = e_{Out} + u_1$$

$$\text{Forma Specifica} = \frac{\text{Forma Integrale}}{M}$$

Lavoro – Trasformazioni Internamente Reversibili

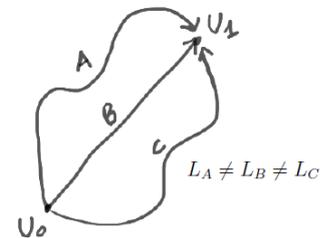
Al fine di definire il lavoro è necessario considerare un sistema caratterizzato solamente da *TIR* (*Trasformazioni internamente reversibili*), in cui i valori di pressione, temperatura e μ sono costanti per definizione. Si consideri un sistema cilindro-pistone, dove su quest'ultimo viene applicata una forza (F) tale da generare uno spostamento (Δx): dunque, il **lavoro meccanico entrante** è pari ad $L_{in} = \int F \cdot dx$. Il fluido all'interno del cilindro, attraverso la sua pressione sulla sezione del pistone, restituisce una forza uguale e contraria tale da bilanciare quella impressa sul pistone dall'esterno. Quindi il valore della forza (F) impresso sul pistone, nel corso di una trasformazione internamente reversibile, è strettamente legata alla pressione del fluido all'interno del cilindro ed alla sezione di quest'ultimo, in particolare: $F = P_{Fluido} \cdot Sezione$.

$$\begin{cases} L_{in} = \int F \cdot dx \\ F = P_{Fluido} \cdot Sezione \end{cases} \rightarrow L_{in} = \int P_{Fluido} \cdot (Sezione \cdot dx) = - \int P_{Fluido} \cdot dV$$

$L_{in} = - \int P_{Sistema} \cdot dV$, dove il segno "-" è giustificato da una variazione negativa del volume del cilindro in una compressione

$$\text{Logicamente } L_{out} = + \int P_{Sistema} \cdot dV$$

Tuttavia bisogna considerare una possibile variazione di pressione nel corso della trasformazione che inevitabilmente muta il valore del lavoro.



Lavoro – Trasformazioni Irreversibili

Si consideri adesso un sistema cilindro-pistone caratterizzato anche da trasformazioni irreversibili. Come già detto in precedenza la velocità della perturbazione, in questo caso generata dalla pressione del fluido all'interno del cilindro, è nettamente maggiore rispetto alla velocità di trasformazione e quindi la pressione del fluido può essere considerata omogenea in ogni punto del cilindro. Tuttavia, in presenza di attrito, parte della forza esterna applicata sul pistone viene bilanciata dalla forza di attrito.

$$\begin{cases} L_{in} = \int F \cdot dx \\ F = P_{Fluido} \cdot Sezione \end{cases}$$

$$L_{in} = \int [(P_{Fluido} \cdot Sezione) + (F_{Attrito})] \cdot dx = \int (P_{Fluido} \cdot Sezione) \cdot dx + \int F_{Attrito} \cdot dx \rightarrow L_{in} = - \int P_{Sistema} \cdot dV + L_{Attrito}$$

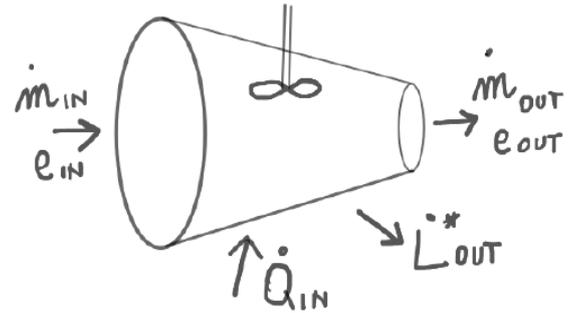
$$\text{Logicamente } L_{out} = + \int P_{Sistema} \cdot dV - L_{Attrito}$$

Calore – Primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica non fornisce una definizione di calore: per ricavarla è necessario considerare il secondo principio della termodinamica. Ciò che è certo è che anche il calore dipende dalla trasformazione.

Primo principio della termodinamica – Sistema aperto in condizioni stazionarie

Alcuni esempi di sistemi aperti in condizioni stazionarie sono le turbine, le pompe ed i compressori. Si consideri un tubo a sezione variabile come sistema aperto in condizioni stazionarie avente un ingresso ed un'uscita di massa, calore in entrata e lavoro in uscita.



$$\dot{m}_{in}e_{in} + \sum \dot{E}(In) = \dot{m}_{out}e_{out} + \sum \dot{E}(Out) + \frac{\partial(M \cdot e)}{\partial t}$$

In condizioni stazionarie: $\frac{\partial(M \cdot e)}{\partial t} = 0$

$$\dot{m}_{in}e_{in} + \sum \dot{E}(In) = \dot{m}_{out}e_{out} + \sum \dot{E}(Out)$$

Nel caso specifico: $\dot{m}_{in} \left(u + g \cdot z + \frac{1}{2} \omega^2 \right)_{in} + \dot{Q}(In) = \dot{m}_{out} \left(u + g \cdot z + \frac{1}{2} \omega^2 \right)_{out} + \dot{L}^*(Out)$

Dove salvo rari casi $E_p = E_c = 0$ Joule

$$\dot{m}_{in}(u)_{in} + \dot{Q}(In) = \dot{m}_{out}(u)_{out} + \dot{L}^*_{out}$$

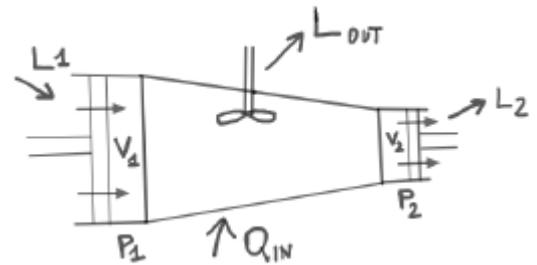
Considerando questa trasformazione come una TIR è possibile ottenere il valore di $\dot{l}^*(Out)$ tramite cui ricavare $\dot{L}^*(Out)$.

$$\dot{l}^*(Out) = + \int P_{Sistema} \cdot dv \rightarrow \dot{L}^*_{out} = \dot{m} \cdot \dot{l}^*_{out} = + \dot{m} \int P_{Sistema} \cdot dv$$

Tuttavia la quantità di lavoro $\dot{L}^*(Out)$ non è detto che sia coincidente con il lavoro utile: potrebbero esserci, infatti, più termini che insieme costituiscono il lavoro totale. Infatti, in questo caso specifico, il flusso in ingresso potrebbe richiedere un lavoro per entrare nel sistema. Per poter ricavare il lavoro utile, si considera questo sistema come se fosse chiuso.

Primo principio della termodinamica – Sistema aperto in condizioni stazionarie (Analizzato come sistema chiuso)

Al fine di poter considerare questo sistema come un sistema chiuso vengono aggiunti due pistoni, uno in ingresso ed uno in uscita. Il primo applicherà una forza per spingere il fluido all'interno del sistema, mentre il secondo subirà una forza da parte del fluido entrato nel sistema.



$$U_1 + L_1 + Q_{in} = U_2 + L_2 + L_{out}, \text{ dove } L_{out} \text{ è il lavoro utile}$$

$$\dot{L}^*_{out} = L_2 - L_1 + L_{out}$$

Si considerino i lavori L_1 ed L_2 come se fossero ottenuti attraverso trasformazioni internamente reversibili. Quindi:

$$L_1 = - \int P_1 \cdot dV = -P_1(0 - V_1) \quad L_2 = - \int P_2 \cdot dV = P_2(V_2 - 0)$$

Siccome L_1 è caratterizzato da una compressione, dove il pistone si sposta fino a toccare il fluido, il suo valore dV è negativo: inizialmente il valore del volume tra pistone e fluido è pari a V_1 e con il procedere della compressione esso tende a zero. Viceversa il lavoro L_2 è caratterizzato da una espansione, dove il secondo pistone viene spostato dalla posizione di equilibrio in modo da "liberare" uno spazio dV .

$$U_1 + P_1V_1 + Q_{in} = U_2 + P_2V_2 + L_{out} \rightarrow \text{Bilancio corretto per un sistema aperto}$$

$$u_1 + P_1v_1 + q_{in} = u_2 + P_2v_2 + l_{out}$$

Per semplificare i calcoli e le misurazioni dei parametri in un sistema è stata introdotta una grandezza chiamata "entalpia specifica".

$$h = \text{Entalpia specifica} = u + Pv \rightarrow h_{in} + q_{in} = h_{out} + l_{out} \quad \text{Logicamente} \rightarrow H = \text{Entalpia} = U + PV$$

$$\dot{m} \cdot h_{in} + \dot{Q}_{in} = \dot{m} \cdot h_{out} + \dot{L}_{out}$$

A questo punto si consideri l'equazione relativa al lavoro totale del sistema ed alle sue componenti.

$$\dot{L}^*_{out} = \dot{L}_2 - \dot{L}_1 + \dot{L}_{out} \rightarrow \dot{L}_{out} = \dot{L}^*_{out} + \dot{L}_1 - \dot{L}_2 \rightarrow \dot{L}_{out} = \dot{L}^*_{out} + \dot{m}(P_1v_1 - P_2v_2)$$

$$\text{Lavoro Utile} = \text{Lavoro Totale} - \text{Lavoro Pulsione (Per tenere in movimento il fluido)}$$

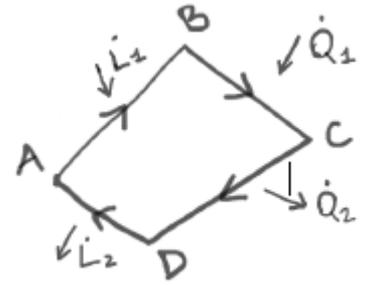
Nel caso in cui il sistema dovesse essere caratterizzato da una TIR, allora si ha che:

$$\dot{L}_{out} = \dot{L}^*_{out} + \dot{m}(P_1v_1 - P_2v_2) = \dot{m} \int P \cdot dv - \dot{m} \int d(Pv)$$

$$\text{Siccome } d(Pv) = P \cdot dv + v \cdot dP \rightarrow P \cdot dv - d(Pv) = -v \cdot dP \text{ e quindi: } \dot{L}_{out} = -\dot{m} \int v \cdot dP$$

Cicli termodinamici

I cicli termodinamici non sono altro che una successione di “n” trasformazioni tali per cui lo stato iniziale coincide con lo stato finale. Per quanto riguarda gli scambi di massa, sia in un sistema chiuso che in un sistema aperto, sono assenti: in particolare, la massa iniziale all’interno del sistema coincide con la massa presente allo stato finale. Logicamente anche la componente di accumulo della massa sarà nulla.



$$\sum \dot{m}_{in} e_{in} + \sum \dot{E}(In) = \sum \dot{m}_{out} e_{out} + \sum \dot{E}(Out) + \frac{\partial(M \cdot e)}{\partial t} \rightarrow 0 + \sum \dot{E}(In) = 0 + \sum \dot{E}(Out) + 0$$

$$\rightarrow \sum \dot{E}(In) = \sum \dot{E}(Out)$$

Nel caso in esame si ha che: $\dot{L}_1 + \dot{Q}_1 = \dot{L}_2 + \dot{Q}_2$.

Lezione del 20 settembre 2021

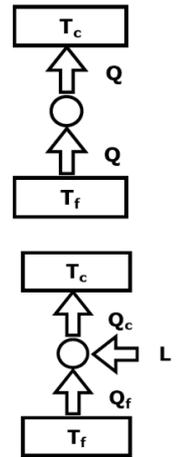
Secondo principio della termodinamica

Esistono diversi enunciati relativi al secondo principio della termodinamica.

Enunciato di Clausius

“Non è realizzabile una macchina il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo più caldo ad uno più freddo”.

Nel sistema riportato di lato sono presenti dei serbatoi, ovvero dei corpi aventi proprietà tali per cui, a seguito di un trasferimento di calore, mantengono una temperatura costante. È possibile approssimare, ad esempio, l’atmosfera ad un serbatoio.

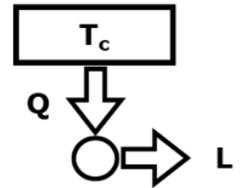


Macchina frigorifera

Una macchina frigorifera permette il trasferimento di calore da un corpo più caldo ad uno più freddo grazie all’impiego di lavoro meccanico. Tuttavia la quantità di calore destinata al serbatoio più freddo sarà diversa da quella rilasciata dal serbatoio più caldo. Il bilancio energetico della macchina, analizzando un numero finito di cicli, è il seguente: $Q_f + L = Q_c$. Attraverso questa equazione si evince chiaramente che $Q_c > Q_f$, visto e considerato che $L > 0$. Qualora il lavoro fosse nullo si ritornerebbe alla situazione, impossibile, trattata in precedenza. Dunque è necessario che il lavoro di una macchina frigorifera sia positivo affinché essa esista.

Enunciato di Kelvin

“È impossibile realizzare una macchina il cui unico risultato preveda che tutto il calore assorbito da una sorgente omogenea sia interamente trasformato in lavoro”.



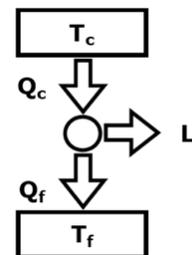
L’enunciato di Kelvin è un altro enunciato del secondo principio della termodinamica ed è equivalente a quello di Clausius. Ciò verrà dimostrato successivamente.

Il caso “**impossibile**” citato dall’enunciato di Kelvin è rappresentabile attraverso un semplice equazione: $Q = L$. Esistono trasformazioni in cui il calore assorbito da una sorgente sia interamente trasformato in calore ma, in tali casi, **devono verificarsi altre trasformazioni** che determinano un cambio di stato del sistema.

Si immagini di espandere il serbatoio avente temperatura T_c e che tale porzione aggiuntiva abbia una temperatura inferiore T_f . A questo punto il serbatoio del **sistema non è omogeneo** in quanto ci sono due zone a temperature differenti. Quindi, in realtà, il calore Q è la risultante di due scambi: uno entrante nella macchina, associato alla porzione T_c , ed uno uscente dalla macchina, associato alla porzione T_f . Questo sistema è realizzabile in quanto la sua struttura coincide con il sistema “macchina motrice”.

Macchina motrice

La macchina motrice prevede un’interazione con un serbatoio ad alta temperatura ed uno a bassa temperatura al fine di produrre lavoro. In particolare essa richiede una quantità di calore dalla sorgente più calda che viene parzialmente trasformata in lavoro, mentre la parte restante viene ceduta in forma di calore al serbatoio più freddo. Il bilancio energetico della macchina è il seguente: $Q_c = Q_f + L$. Anche in questo caso, considerato che $L > 0$ per definizione, si ha che $Q_c > Q_f$. Qualora il lavoro fosse nullo si otterrebbe nuovamente il caso limite “vietato” dall’enunciato di Clausius.

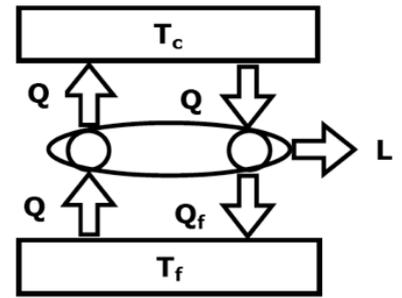


Equivalenza dell'enunciato di Clausius e dell'enunciato di Kelvin

Verificando l'equivalenza tra i due enunciati si noterà che la **violazione dell'enunciato di Clausius implica la violazione di Kelvin e viceversa**.

- **Non Clausius implica Non Kelvin**

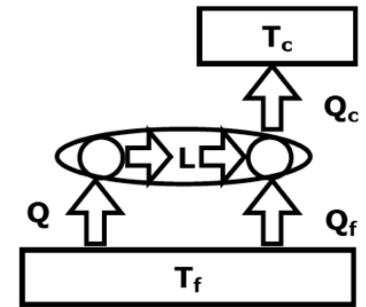
La macchina del sistema rappresentata nella parte sinistra del disegno viola l'enunciato di Clausius in quanto ha come unico risultato il trasferimento di calore da un serbatoio avente temperatura minore rispetto al serbatoio ricevente e senza alcun impiego di lavoro. Nella parte destra, invece, è rappresentata una macchina motrice in linea con entrambi gli enunciati. Siccome la quantità assorbita dal serbatoio più caldo è pari a quella ceduta alla macchina motrice, è possibile effettuare un collegamento diretto tra le due macchine andando ad escludere quindi il serbatoio più caldo. A questo punto le due macchine possono essere considerate come un'unica macchina che assorbe una quantità di calore $Q - Q_f$ e che genera un lavoro L , ma questo viola l'enunciato di Kelvin.



Dunque, in questo caso, è stato dimostrato che violando Clausius viene violato anche Kelvin.

- **Non Kelvin implica Non Clausius**

La macchina del sistema rappresentata nella parte sinistra del disegno viola l'enunciato di Kelvin in quanto ha come unico risultato la trasformazione di tutto il calore assorbito da una sorgente omogenea in lavoro. Nella parte destra, invece, è rappresentata una macchina frigorifera che grazie al lavoro effettuato dalla prima macchina riesce a trasferire calore dal serbatoio più freddo verso quello più caldo. L'insieme di queste due macchine può essere considerato come un'unica macchina che trasferisce una quantità di calore $Q + Q_f$ da un corpo più freddo ad uno più caldo, ma questo viola l'enunciato di Clausius.



Quindi è stato dimostrato che violando Kelvin viene violato anche Clausius.

Il principio dell'aumento dell'entropia

L'entropia è definita "per simmetria" rispetto al lavoro. Il calore viene definito parallelamente all'entropia a partire da un'osservazione a partire dal lavoro meccanico uscente per una TIR. In particolare tale lavoro è definito da una grandezza intensiva (P) integrata rispetto ad una grandezza estensiva (V). Si ipotizzi di definire il calore come una grandezza intensiva (Y) integrata rispetto ad una grandezza estensiva (X).

$$L = \int P \cdot dV \rightarrow \text{Lavoro meccanico uscente per una TIR}$$

$$Q = \int Y \cdot dX, \text{ dove } Y = \text{Intensiva ed } X = \text{Estensiva}$$

Il potenziale che determina lo scambio di lavoro è la pressione, mentre l'equivalente per il calore è la temperatura (T). Questa grandezza viene poi integrata rispetto ad una grandezza estensiva (S), detta **entropia**, avente come unità di misura [$\frac{J}{K}$].

$$Q = \int T \cdot dS \text{ Calore entrante per una TIR}$$

Data una definizione di calore e di entropia è possibile formulare il secondo principio termodinamico come segue: "Il principio dell'aumento dell'entropia afferma che in un sistema isolato la variazione di entropia è sempre positiva".

Dunque, considerato un sistema isolato in cui non ci sono scambi con l'esterno, la variazione di entropia è sempre positiva. È necessario verificare questo enunciato in virtù dell'enunciato di Clausius e di Kelvin.

Il principio dell'aumento dell'entropia – Caso spontaneo

Si consideri un sistema isolato costituito da due serbatoi a diverse temperature ed un flusso di calore dal serbatoio più caldo al più freddo. Noti i valori di calore entrante per una TIR ($Q_{in} = \int T \cdot dS$) e di calore uscente per una TIR ($Q_{out} = - \int T \cdot dS$) è possibile calcolare la variazione di entropia nei due serbatoi.

$$Q_{out} = - \int T_c \cdot dS \rightarrow Q_{out} = -T_c \int dS \rightarrow Q_{out} = -T_c \cdot \Delta S_c$$

$$\Delta S_c = - \frac{Q_{out}}{T_c}$$

Noto che la quantità di calore Q_{out} è positiva, ed anche la temperatura T_c , si ottiene che la variazione di entropia è negativa.

Analogamente è possibile calcolare la variazione di entropia per il serbatoio più freddo.

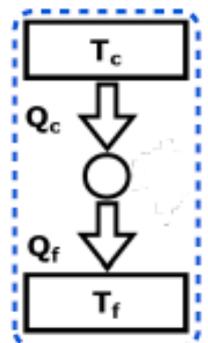
$$Q_{in} = \int T_f \cdot dS \rightarrow Q_{in} = T_f \int dS \rightarrow Q_{in} = T_f \cdot \Delta S_f$$

$$\Delta S_f = \frac{Q_{in}}{T_f}$$

Noto che la quantità di calore Q_{in} è positiva, ed anche la temperatura T_f , si ottiene che la variazione di entropia in tal caso è positiva.

Tuttavia, considerando gli scambi di calore dell'intero sistema, si nota che $Q_{out} = Q_{in}$, ovvero che $-T_c \cdot \Delta S_c = T_f \cdot \Delta S_f$. Arrangiando in modo diverso l'equazione si ottiene: $-T_c \cdot \Delta S_c = T_f \cdot \Delta S_f \rightarrow \frac{T_c}{T_f} = \frac{\Delta S_f}{(-\Delta S_c)}$.

Logicamente con $T_c > T_f$ si ha che $\frac{T_c}{T_f} > 1$ e quindi anche $\frac{\Delta S_f}{(-\Delta S_c)} > 1$, ovvero $0 < -\Delta S_c < \Delta S_f$. Non essendoci alcun scambio con l'esterno, ed essendo l'entropia una proprietà additiva, si ha che: $\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{gen}$. Essendo però ΔS_f maggiore di ΔS_c , si ha che $\Delta S_{sistema} > 0$ e quindi viene generata un'entropia ($S_{gen} > 0$).



Il principio dell'aumento dell'entropia – Caso impossibile (NON Clausius)

Si consideri un sistema isolato costituito da due serbatoi a diverse temperature ed un flusso di calore dal serbatoio più freddo a quello più caldo. Rispetto al caso precedente il verso degli scambi di calore è invertito.

$$Q_{in} = \int T_c \cdot dS \rightarrow Q_{in} = T_c \int dS \rightarrow Q_{in} = T_c \cdot \Delta S_c \qquad \Delta S_c = \frac{Q_{in}}{T_c}$$

Noto che la quantità di calore Q_{in} è positiva, ed anche la temperatura T_c , si ottiene che la variazione di entropia in tal caso è positiva.

Analogamente è possibile calcolare la variazione di entropia per il serbatoio più freddo.

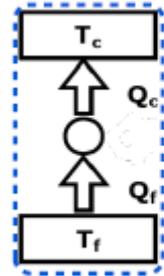
$$Q_{out} = - \int T_f \cdot dS \rightarrow Q_{out} = T_f \int dS \rightarrow Q_{out} = -T_f \cdot \Delta S_f \qquad \Delta S_f = -\frac{Q_{out}}{T_f}$$

Noto che la quantità di calore Q_{out} è positiva, ed anche la temperatura T_f , si ottiene che la variazione di entropia in tal caso è negativa.

Tuttavia, considerando gli scambi di calore dell'intero sistema, si nota che $Q_{out} = Q_{in}$, ovvero che $T_c \cdot \Delta S_c = -T_f \cdot \Delta S_f$. Arrangiando in modo diverso l'equazione si ottiene: $T_c \cdot \Delta S_c = -T_f \cdot \Delta S_f \rightarrow \frac{T_c}{T_f} = \frac{(-\Delta S_f)}{\Delta S_c}$.

Logicamente con $T_c > T_f$ si ha che $\frac{T_c}{T_f} > 1$ e quindi anche $\frac{(-\Delta S_f)}{\Delta S_c} > 1$, ovvero $0 < \Delta S_c < -\Delta S_f$. Non essendoci alcun scambio con l'esterno, ed essendo l'entropia una proprietà additiva, si ha che: $\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{gen}$. Essendo però $\Delta S_f < 0$ e $\Delta S_c > 0$, ed anche $\Delta S_c < -\Delta S_f$, si ha che $\Delta S_{sistema} < 0$ e quindi viene generata un'entropia negativa ($S_{gen} < 0$).

Tuttavia, per il principio di aumento dell'entropia, in un sistema isolato la variazione di entropia deve essere sempre positiva. Ma ciò risulta essere in contraddizione con quanto appena ottenuto per il sistema in esame. Dunque, **scelto un sistema che viola Clausius, viene violato anche il principio dell'aumento dell'entropia.**



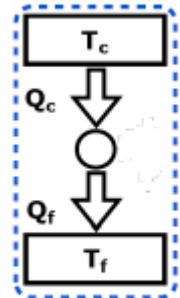
Il principio dell'aumento dell'entropia – Caso reversibile

Si consideri un sistema isolato, particolare, costituito da due serbatoi aventi la stessa temperatura. Anche in questo caso valgono le definizioni di calore per una TIR.

$$Q_{out} = - \int T_c \cdot dS \rightarrow Q_{out} = T_c \int dS \rightarrow Q_{out} = -T_c \cdot \Delta S_c \qquad \Delta S_c = -\frac{Q_{out}}{T_c}$$

$$Q_{in} = \int T_f \cdot dS \rightarrow Q_{in} = T_f \int dS \rightarrow Q_{in} = T_f \cdot \Delta S_f \qquad \Delta S_f = \frac{Q_{in}}{T_f}$$

Logicamente, con $Q_{out} = Q_{in}$, si ha che $T_f \cdot \Delta S_f = -T_c \cdot \Delta S_c$. Tuttavia essendo le temperature dei due serbatoi uguali, si ha che: $\Delta S_f = -\Delta S_c$. Essendo l'entropia una proprietà additiva, si ha che $\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{gen}$, ma con $\Delta S_f = -\Delta S_c$ si ha che $\Delta S_{sistema} = S_{gen} = 0$.



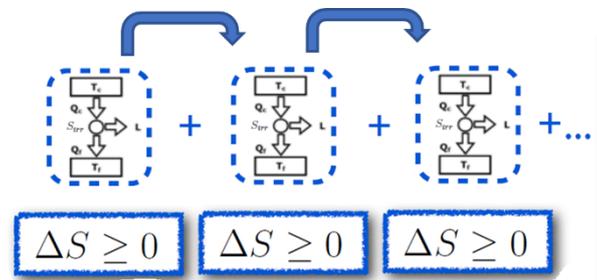
Questo caso limite, che prevede scambi di calore reversibili, permette di effettuare una riflessione in merito all'irreversibilità di una trasformazione. **In generale, la generazione di entropia**, dovuta ad uno scambio di calore tra serbatoi aventi temperature differenti, **rende tale trasformazione irreversibile**. Il concetto di irreversibilità sarà utile per "misurare" la **distanza tra un caso ideale ed uno reale**. Vengono definite "irreversibilità esterne" le irreversibilità generate da uno scambio termico con ΔT non nulli.

Il principio di massima entropia

"In un sistema in equilibrio, fissati Energia (U), Volume (V) e Composizione Chimica (N_i) di ogni costituente del sistema, l'entropia assume il valore massimo".

Al fine di poter descrivere il principio di massima entropia è utile sfruttare il principio dell'aumento di entropia.

Si consideri un sistema iniziale isolato costituito da "n" componenti e si proceda con la rimozione dei vincoli interni così che sia possibile raggiungere uno stato di equilibrio, ovvero che $T_c = T_f$. Ovviamente ogni passaggio, o modifica, del sistema fornisce un $\Delta S \geq 0$ per il principio dell'aumento di entropia.



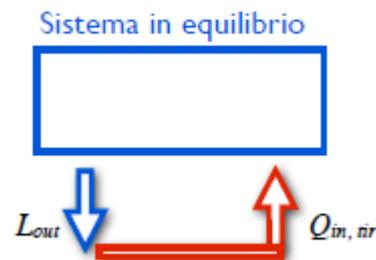
Raggiunto l'equilibrio l'energia all'interno del sistema, in quanto isolato, è la stessa dello stato iniziale. Anche il volume complessivo rimane inalterato, altrimenti ci sarebbe stato uno scambio di lavoro. La composizione chimica è costante poiché in un sistema isolato non ci sono scambi di massa. L'unica grandezza che varia ad ogni passaggio è quindi l'entropia: quindi si ha che $S_{finale} > S_{iniziale}$ dove S_{finale} è il valore massimo possibile in quanto in sistema non può più evolvere.

Il principio di minima energia

“In un sistema in equilibrio, fissati Entropia (S), Volume (V) e Composizione Chimica (N_i) di ogni costituente del sistema, l'energia assume il valore minimo”.

Al fine di dimostrare il principio di minima energia si procede per assurdo.

La trasformazione “A”, rappresentata in blu a destra, viola il principio di minima energia. Essa prevede l'estrazione di lavoro da un sistema in equilibrio mantenendo l'entropia costante. Tuttavia è impossibile in quanto l'estrazione di lavoro prevede una diminuzione dell'energia interna. Ciò è impossibile in quanto, oltre ad aver fissato Volume (V) e Composizione Chimica (N_i) è stata fissata anche l'Entropia (S).



Il lavoro estratto tramite la trasformazione “A” viene convertito in calore, attraverso un TIR, e poi reintrodotta nel sistema.

Trasformazione A	Trasformazione B
$L_{out} \neq 0$	$Q_{in, TIR} = \int T \cdot dS$
$\Delta S_A = 0$	$Q_{in, TIR} = L_{out} = \Delta U_B$
$\Delta U_A = -L_{out} < 0$	$\Delta S_B > 0$
$U_0 = L_{out} + U_1 \rightarrow U_1 - U_0 = L_{out} \rightarrow \Delta U_A = -L_{out}$	$U_{in} + Q_{in} = U_{fin} \rightarrow U_{fin} - U_{in} = Q_{in} \rightarrow \Delta U_B = Q_{in} = L_{out}$
Trasformazione A+B	
$\Delta S_A + \Delta S_B > 0$	$\Delta U_A + \Delta U_B = 0$

Siccome il lavoro estratto viene convertito in calore e poi riassorbito dal sistema, la variazione di energia complessiva è nulla. L'entropia totale, invece, è maggiore di zero ma questo è in contraddizione con il principio di massima entropia. È stato quindi dimostrato che la violazione del principio di minima energia comporta la violazione del principio di massima entropia.

RIEPILOGO - Secondo principio della termodinamica	
Enunciato di Clausius	“Non è realizzabile una macchina il cui <u>unico risultato</u> sia quello di trasferire calore da un corpo più caldo ad uno più freddo”
Enunciato di Kelvin	“È impossibile realizzare una macchina il cui <u>unico risultato</u> preveda che tutto il calore assorbito da una <u> sorgente omogenea</u> sia interamente trasformato in lavoro”
Principio dell'aumento dell'Entropia	“In un sistema isolato la variazione di entropia è sempre positiva”
Principio di massima Entropia	“In un <u>sistema in equilibrio</u> , fissati Energia (U), Volume (V) e Composizione Chimica (N_i) di ogni costituente del sistema, l'entropia assume il valore massimo”
Principio di minima Energia	“In un <u>sistema in equilibrio</u> , fissati Entropia (S), Volume (V) e Composizione Chimica (N_i) di ogni costituente del sistema, l'energia assume il valore minimo”

Lezione del 23 settembre 2021

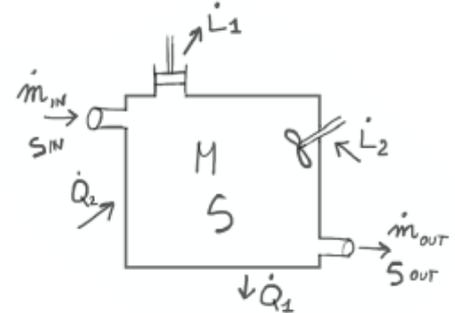
Bilancio entropico

Il bilancio entropico permette di **valutare quanto una trasformazione si discosta dall'ideale**, ovvero da una TIR, e le cause di irreversibilità.

$$S_{irr} = S_{gen}^{esterne} + S_{gen}^{interne}$$

S_{irr} = Irreversibilità esterne (scambio termico con ΔT non nulli) + Irreversibilità interne (trasformazioni NON – TIR)

Attraverso lo stesso approccio dedicato al bilancio energetico di un sistema generico è possibile ricavare anche la relativa equazione del bilancio entropico. Si consideri quindi un generico sistema complesso avente, oltre ad almeno una portata di massa in entrata e in uscita ed una massa (M) accumulata al suo interno, uno o più dispositivi e/o pareti in grado di effettuare scambi di energia (lavoro, calore, ecc). Nella rappresentazione di tale sistema è fondamentale stabilire i versi di ogni grandezza. Il passaggio successivo è quello di attribuire un valore di entropia specifica (s) alle masse entranti considerate ed un valore di entropia (S) alla massa accumulata nel serbatoio.



Per definizione tutto il calore scambiato in ingresso durante una TIR andrà a determinare una variazione di entropia dettata dalla seguente definizione: $Q_{in} = \int T \cdot dS$, dove “ S ” si riferisce al sistema completo. Analogamente è possibile affermare la stessa relazione per una determinata quantità di calore scambiata in ingresso durante una TIR: $Q_{out} = - \int T \cdot dS$. Tuttavia all'interno del sistema in esame ci sono più scambi energetici che generano variazioni di entropia: ad esempio i due scambi di calore Q_1 in uscita e Q_2 in ingresso.

Nel caso di più quantità di calore scambiate in ingresso si ha: $\delta Q_{in} = T dS_{Q_{in}}$, dove $dS_{Q_{in}}$ = Variazione di entropia specifica associata a Q_{in}

N.B. Viene utilizzato “ δ ” in quanto il calore “ Q ” non è una funzione di stato ma dipende dalla trasformazione.

$$\delta Q_{in} = T dS_{Q_{in}} \rightarrow dS_{Q_{in}} = \frac{\delta Q_{in}}{T} \rightarrow \int dS_{Q_{in}} = \int \frac{\delta Q_{in}}{T} \rightarrow \Delta S_{Q_{in}} = \int \frac{\delta Q_{in}}{T}$$

L'equazione appena ottenuta indica che **ad ogni Q_{in} corrisponde un contributo alla variazione dell'entropia del sistema**. Tale forma si riferisce ad una trasformazione avvenuta in un certo intervallo di tempo: è possibile ricavare anche la forma istantanea.

$$Q_{in}[J] \rightarrow \dot{Q}_{in} \left[\frac{J}{s} = W \right] \text{ e } \Delta S_{Q_{in}} \rightarrow \dot{S}_{Q_{in}} \left[\frac{J}{s \cdot K} = \frac{W}{K} \right] \quad \dot{S}_{Q_{in}} = \int \frac{\delta \dot{Q}_{in}}{T} \text{ (Forma istantanea)}$$

In maniera del tutto analoga può essere definito il valore istantaneo dell'entropia relativo ad una quantità di calore uscente Q_{out} .

$$\delta Q_{out} = -T dS_{Q_{out}} \rightarrow dS_{Q_{out}} = -\frac{\delta Q_{out}}{T} \rightarrow \int dS_{Q_{out}} = - \int \frac{\delta Q_{out}}{T} \rightarrow \Delta S_{Q_{out}} = - \int \frac{\delta Q_{out}}{T} \rightarrow \dot{S}_{Q_{out}} = - \int \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T} \text{ (Forma istantanea)}$$

Le due relazioni ottenute partendo dalla definizione di calore per una TIR. Perché esse siano valide l'importante è che la **temperatura (T) sia definita e unica, ovvero che la temperatura all'interno del sistema sia omogenea istante per istante**. Quindi, per poter applicare le definizioni di calore usate in precedenza, **non è necessario che la trasformazione sia una TIR**.

Oltre agli scambi di calore anche le **portate massiche** in entrata ed in uscita **forniscono contributi alla variazione dell'entropia del sistema**. Nel caso in esame, viene associata una variazione dell'entalpia del sistema sia alla massa entrante che alla massa uscente.

Per quanto riguarda le **potenze meccaniche**, invece, **non si ha un'evidenza diretta circa la fornitura di contributi alla variazione dell'entropia del sistema**. Tuttavia nel bilancio entropico è contemplata la generazione di entropia associata alle irreversibilità (\dot{S}_{irr}), infatti è noto che l'entropia non si conserva. Quindi **i contributi delle potenze meccaniche**, non essendo identificabili singolarmente, vengono **compresi nell'entropia associata alle irreversibilità (\dot{S}_{irr})**.

$$\sum \dot{m}_{in} s_{in} + \sum \dot{S}_{Q_{in}} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} + \dot{S}_{irr} = \sum \dot{m}_{out} s_{out} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{N.B.} \quad \dot{S}_{Q_{in}} > 0 \quad \dot{S}_{Q_{out}} < 0 \quad \dot{S}_{irr} > 0$$

$$\sum \dot{m}_{in} s_{in} + \sum \int \frac{\delta \dot{Q}_{in}}{T} + \dot{S}_{irr} = \sum \dot{m}_{out} s_{out} + \sum \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T} + \frac{\partial S}{\partial t} \rightarrow \text{Valida solo se } T \text{ è definta}$$

Bilancio entropico – Sistema chiuso

Il sistema chiuso non prevede scambi di massa ma solo di energia, quindi le componenti entropiche relative alle portate in ingresso ed in uscita sono nulle. In tal caso vi è una quantità di calore uscente ed una entrante.

$$\sum \dot{m}_{in} s_{in} + \sum \dot{S}_{Q_{in}} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} + \dot{S}_{irr} = \sum \dot{m}_{out} s_{out} + \frac{\partial S}{\partial t} \rightarrow \text{Sistema Chiuso: } \sum \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{irr} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} = \frac{\partial S}{\partial t}$$

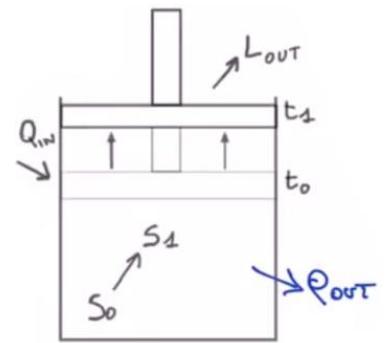
Per esprimere il bilancio in termini di potenza, quindi istante per istante, si ottiene la seguente equazione.

$$\dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{irr} + \dot{S}_{Q_{out}} = \frac{\partial S}{\partial t}$$

Invece, per analizzare la trasformazione da t_0 a t_1 , si procede integrando l'equazione appena ottenuta.

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{S}_{Q_{in}} dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{S}_{irr} dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{S}_{Q_{out}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial S}{\partial t} dt \rightarrow \Delta S_{Q_{in}} + S_{irr} + \Delta S_{Q_{out}} = S_1 - S_0$$

$$S_0 + \Delta S_{Q_{in}} + S_{irr} + \Delta S_{Q_{out}} = S_1$$



S_0	$\Delta S_{Q_{in}}$	S_{irr}	$\Delta S_{Q_{out}}$	S_1
-	Quantità positiva	Quantità positiva	Quantità negativa	-
-	$\int \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T}$	-	$-\int \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T}$	-
Stato Iniziale	Apporti			Stato Finale

Bilancio entropico – Sistema aperto in condizioni stazionarie

Il sistema in condizioni stazionarie, in generale, non prevede accumuli di massa al suo interno. Nel caso in esame vi è sia una quantità di massa uscente, sia una entrante e lo stesso si può dire anche per le quantità di calore.

$$\sum \dot{m}_{in} s_{in} + \sum \dot{S}_{Q_{in}} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} + \dot{S}_{irr} = \sum \dot{m}_{out} s_{out} + \frac{\partial S}{\partial t}$$

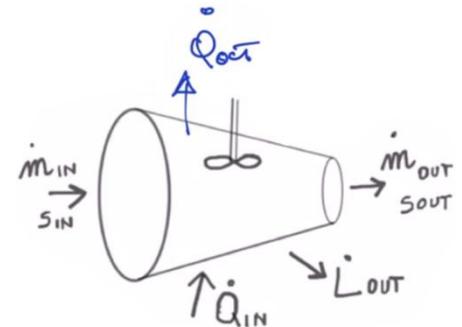
$$\text{Sistema Aperto in Condizioni Stazionarie: } \sum \dot{m}_{in} s_{in} + \sum \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{irr} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} = \sum \dot{m}_{out} s_{out}$$

Per esprimere il bilancio in termini di potenza, quindi istante per istante, si ottiene la seguente equazione.

$$\dot{m}_{in} s_{in} + \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{irr} + \dot{S}_{Q_{out}} = \dot{m}_{out} s_{out}$$

Procedendo per integrazione come nel caso precedente si ottiene la seguente equazione.

$$S_{in} + \Delta S_{Q_{in}} + S_{irr} + \Delta S_{Q_{out}} = S_{out}$$



S_{in}	$\Delta S_{Q_{in}}$	S_{irr}	$\Delta S_{Q_{out}}$	S_{out}
-	Quantità positiva	Quantità positiva	Quantità negativa	-
-	$\int \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T}$	-	$-\int \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T}$	-
Entropia massa entrante	Apporti			Entropia massa uscente

Bilancio entropico – Cicli termodinamici

I cicli termodinamici, in generale, non prevedono né accumuli di massa al loro interno e nemmeno flussi di massa in entrata e/o in uscita.

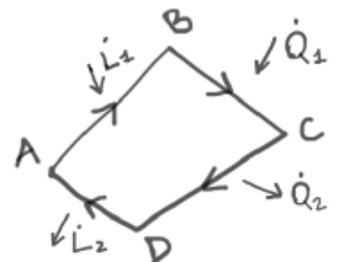
$$\sum \dot{m}_{in} s_{in} + \sum \dot{S}_{Q_{in}} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} + \dot{S}_{irr} = \sum \dot{m}_{out} s_{out} + \frac{\partial S}{\partial t} \rightarrow \sum \dot{S}_{Q_{in}} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} + \dot{S}_{irr} = 0 \rightarrow \text{Apporti} = 0$$

Logicamente in un ciclo termodinamico che non prevede irreversibilità i contributi $\dot{S}_{Q_{in}}$ ed $\dot{S}_{Q_{out}}$ si bilanciano.

$$\sum \dot{S}_{Q_{in}} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} = 0 \rightarrow \text{Se } S_{irr} = 0$$

Invece, un ciclo termodinamico privo di quantità di calore in uscita, sarebbe impossibile.

$$\sum \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{irr} = 0 \rightarrow \text{Siccome entrambi i termini sono positivi, l'equazione è impossibile.}$$



Irreversibilità interne in trasformazioni internamente reversibili

Pistone senza attrito

Il pistone del sistema in esame subisce una forza (F) dall'esterno, che genera di conseguenza un lavoro meccanico entrante ($L_{in} = - \int P \cdot dV$). Essendo un sistema cilindro-pistone privo di attrito ed in condizione adiabatica si ha che: $Q_{in} = \int T \cdot dS = 0$. Logicamente, essendo la temperatura definita in una TIR ed essendo sicuramente diversa da zero, si ha che $dS = 0$. In virtù di ciò è possibile effettuare il bilancio entropico del sistema.

$$S_{irr} + S_0 = S_1 \rightarrow S_{irr} = S_1 - S_0 = \Delta S = 0$$

L'equazione appena riportata afferma che, nel caso di trasformazioni internamente reversibili, **le irreversibilità sono nulle**. In particolare si avrà che le irreversibilità interne sono nulle in quanto le trasformazioni sono internamente reversibili, mentre le irreversibilità esterne sono nulle in quanto non vi sono scambi termici con ΔT non nulli.

$$S_{irr} = S_{irr}^{int} + S_{irr}^{est} = 0 \rightarrow 0 \text{ (in quanto TIR)} + \text{assenti (in quanto } \Delta T = 0) = 0$$

Il caso in esame, ovvero con $S_{irr} = 0$, viene definito **completamente irreversibile**.

Turbina ideale

La turbina ideale rappresenta un particolare sistema aperto in condizioni stazionarie privo di scambi di calore in entrata ed in uscita ma che genera un lavoro meccanico uscente. In virtù di quanto appena affermato si ha che:

$$L_{out} = -\dot{m} \int v \cdot dP \quad \dot{Q}_{in} = \dot{m} \int T \cdot dS = 0$$

Come nel caso precedente, dall'equazione relativa al calore entrante, si deduce che $dS = 0$. In virtù di ciò è possibile effettuare il bilancio entropico del sistema.

$$\dot{m} \cdot s_{in} + \dot{S}_{irr} = \dot{m} \cdot s_{out} \rightarrow \dot{m} \cdot s_{out} - \dot{m} \cdot s_{in} = \dot{S}_{irr} \rightarrow \dot{m}(s_{out} - s_{in}) = \dot{S}_{irr} \rightarrow \dot{m} \cdot \Delta s = \dot{S}_{irr} = 0$$

$$\text{Con } \Delta s = 0 \rightarrow \dot{S}_{irr} = 0$$

L'equazione appena riportata afferma che, nel caso di trasformazioni internamente reversibili, **le irreversibilità sono nulle**. In particolare si avrà che le irreversibilità interne sono nulle in quanto le trasformazioni sono internamente reversibili, mentre le irreversibilità esterne sono nulle in quanto non vi sono scambi termici con ΔT non nulli.

$$S_{irr} = S_{irr}^{int} + S_{irr}^{est} = 0 \rightarrow 0 \text{ (in quanto TIR)} + \text{assenti (in quanto } \Delta T = 0) = 0$$

Irreversibilità interne in trasformazioni non quasi-statiche (Non-TIR)

Pistone con attrito

Il pistone del sistema in esame subisce una forza (F) dall'esterno che genera di conseguenza un lavoro entrante. Tuttavia, in questo caso, il lavoro entrante non consiste solo in lavoro meccanico entrante ma anche in attrito.

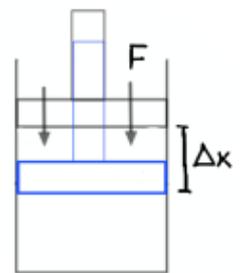
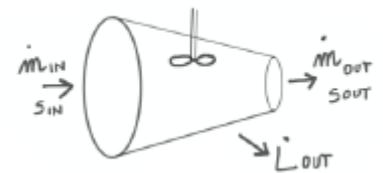
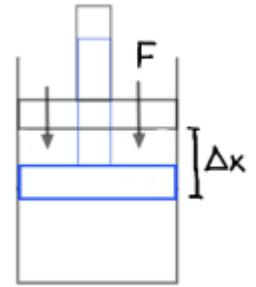
$$L_{in} = - \int P \cdot dV + L_{attrito}$$

In virtù del sistema in esame si ha il seguente bilancio entropico: $S_0 + S_{irr} = S_1 \rightarrow S_1 - S_0 = S_{irr} \rightarrow S_{irr} = \Delta S \neq 0$. Siccome le trasformazioni non sono quasi-statiche si ha che $S_{irr} \neq 0$: ciò significa che $S_{irr} > 0$.

Il lavoro dissipato in forma di attrito genera una quantità di calore ($Q_{attrito}$) "equivalente" ad una quantità di calore in ingresso ($Q_{in} = \int T \cdot dS$). È molto importante notare che **il calore generato dall'attrito non è una quantità di calore in ingresso, ma una irreversibilità**.

Mulinello di Joule

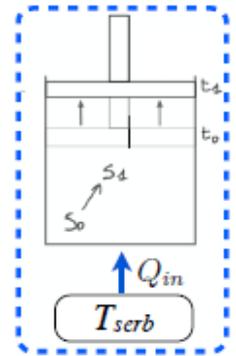
Il mulinello di Joule può essere analizzato in maniera analoga al caso precedente. Il lavoro entrante viene dissipato totalmente in forma di attrito, che a sua volta genera una quantità di calore non nulla. Siccome le trasformazioni non sono quasi statiche si ha che $\Delta S = S_{irr} > 0$.



Irreversibilità esterne in trasformazioni quasi-statiche (TIR)

Sistema chiuso

Un sistema isolato prevede una irreversibilità positiva o nulla: in particolare essa è positiva laddove ci sia uno scambio termico con $\Delta T \neq 0$ ed irreversibilità esterne, mentre è nulla quando non vi è alcuno scambio termico. Considerando un generico sistema chiuso composto da un sistema cilindro-pistone ed un serbatoio avente temperatura T_{serb} si ha uno scambio di calore tra di essi.



Per definizione di calore entrante e calore uscente in condizioni TIR si ha che:

$$Q_{in} = \int T \cdot dS, \text{ mentre } Q_{out}^{serb} = - \int T_{serb} \cdot dS_{serb}$$

Tuttavia, essendo uno scambio di calore in condizioni quasi-statiche, si ha che: $Q_{in} = Q_{out}^{serb} \rightarrow \int T_{pistone} \cdot dS_{pistone} = - \int T_{serb} \cdot dS_{serb} > 0$.

$$\text{Bilancio Entropico: } S_0^{sist} + S_{irr} = S_1^{sist} \rightarrow S_0 + S_0^{serb} + S_{irr} = S_1 + S_1^{serb} \rightarrow \Delta S_{serb} + \Delta S = S_{irr}$$

Siccome il calore è entrante all'interno del sistema cilindro-pistone si ha che $\Delta S > 0$. Per il motivo opposto, siccome il calore è uscente dal serbatoio si ha che $\Delta S_{serb} < 0$. Tuttavia, per definizione, in un sistema isolato con irreversibilità esterne si ha che $S_{irr} \geq 0$.

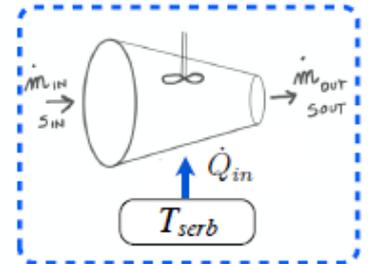
Si consideri la seguente equazione: $\int T_{pistone} \cdot dS_{pistone} = - \int T_{serb} \cdot dS_{serb} \rightarrow T_{pistone} \cdot dS_{pistone} = -T_{serb} \cdot dS_{serb} \rightarrow \frac{T_{serb}}{T_{pistone}} = - \frac{dS_{pistone}}{dS_{serb}}$.

$\frac{T_{serb}}{T_{pistone}} = - \frac{dS}{dS_{serb}}$	$\frac{T_{serb}}{T_{pistone}} = 1$	$T_{pistone} \cdot dS_{pistone} = -T_{serb} \cdot dS_{serb} \rightarrow \frac{T_{serb}}{T_{pistone}} = - \frac{dS_{pistone}}{dS_{serb}}$ con $T_{serb} = T_{pistone} \rightarrow dS_{pistone} = -dS_{serb}$ $\rightarrow \Delta S + \Delta S_{serb} = S_{irr} = 0$
	$\frac{T_{serb}}{T_{pistone}} > 1$	$T_{pistone} \cdot dS_{pistone} > -T_{serb} \cdot dS_{serb} \rightarrow \frac{T_{serb}}{T_{pistone}} > - \frac{dS_{pistone}}{dS_{serb}}$ con $T_{serb} > T_{pistone} \rightarrow dS_{pistone} > -dS_{serb}$ $\rightarrow \Delta S + \Delta S_{serb} = S_{irr} > 0$

N.B. Per poter studiare le reversibilità esterne è necessario conoscere i due sistemi che scambiano calore. Senza questa informazione sarebbe impossibile analizzare le reversibilità esterne ed il caso sarebbe analogo al pistone con attrito in condizioni non-TIR.

Sistema aperto

Un sistema aperto prevede una irreversibilità positiva o nulla: in particolare essa è positiva laddove ci sia uno scambio termico con $\Delta T \neq 0$ ed irreversibilità esterne, mentre è nulla quando non vi è alcuno scambio termico. Considerando un generico sistema aperto composto da una turbina ideale in regime stazionario ed un serbatoio avente temperatura T_{serb} si ha uno scambio di calore tra di essi.



Per definizione di calore entrante e calore uscente in condizioni TIR si ha che:

$$\dot{Q}_{in} = \dot{m} \cdot \int T_{turbina} \cdot ds_{turbina}, \text{ mentre } \dot{Q}_{out}^{serb} = - \int T_{serb} \cdot d\dot{S}_{serb}$$

Tuttavia, essendo uno scambio di calore in condizioni quasi-statiche, si ha che: $\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}^{serb} \rightarrow \dot{m} \cdot \int T_{turbina} \cdot ds_{turbina} = - \int T_{serb} \cdot d\dot{S}_{serb} > 0$.

$$\text{Bilancio Entropico (In termini di potenze): } \dot{m} \cdot s_{in} + S_0^{serb} + \dot{S}_{irr} = \dot{m} \cdot s_{out} + S_1^{serb} \rightarrow \dot{m}(s_{out} - s_{in}) + \Delta S_{serb} = \dot{S}_{irr} \rightarrow \dot{m}(\Delta s) + \dot{S}_{serb} = \dot{S}_{irr}$$

Siccome il serbatoio cede calore verso la turbina si ha che $\Delta S_{serb} < 0$, tuttavia, per definizione, in un sistema aperto con irreversibilità esterne si ha che $S_{irr} \geq 0$ e quindi $\dot{m}(\Delta s)$ deve essere necessariamente positivo.

Per avere un'analisi più dettagliata dell'intero sistema è necessario dividerlo in due parti.

Turbina ideale	Serbatoio
$\dot{m} \cdot s_{in} + \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{irr}^{SA} = \dot{m} \cdot s_{out} \rightarrow \dot{m}(s_{out} - s_{in}) = \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{irr}^{SA}$ Siccome si tratta di una TIR: $\dot{S}_{irr}^{SA} = 0$ $\dot{m}(s_{out} - s_{in}) = \dot{S}_{Q_{in}}$	$\dot{S}_{serb} + \dot{S}_{irr}^{SB} = \dot{S}_{Q_{out}}$ Siccome si tratta di una TIR: $\dot{S}_{irr}^{SB} = 0$ $\dot{S}_{serb} = \dot{S}_{Q_{out}}$
$\dot{m}(s_{out} - s_{in}) + \dot{S}_{serb} = \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{Q_{out}} \rightarrow \dot{m}(s_{out} - s_{in}) + \dot{S}_{serb} = \dot{S}_{irr}, \text{ dove } \dot{S}_{irr} = \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{Q_{out}}$	

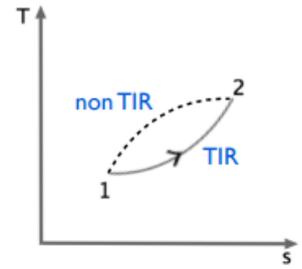
$\dot{S}_{irr} = \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{Q_{out}}$	$\int T_{turbina} \cdot dS_{turbina} = - \int T_{serb} \cdot dS_{serb} \rightarrow T_{turbina} \cdot dS_{turbina} = - T_{serb} \cdot dS_{serb}$ Se $T_{turbina} = T_{serb} \rightarrow dS_{turbina} = -dS_{serb} \rightarrow \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{Q_{out}} = \dot{S}_{irr} = 0$	$\dot{S}_{irr} = \dot{m}(\Delta s) + \dot{S}_{serb} = 0$
	$\int T_{turbina} \cdot dS_{turbina} = - \int T_{serb} \cdot dS_{serb} \rightarrow T_{turbina} \cdot dS_{turbina} = - T_{serb} \cdot dS_{serb}$ Se $T_{turbina} > T_{serb} \rightarrow dS_{turbina} > -dS_{serb} \rightarrow \dot{S}_{Q_{in}} + \dot{S}_{Q_{out}} = \dot{S}_{irr} > 0$	$\dot{S}_{irr} = \dot{m}(\Delta s) + \dot{S}_{serb} > 0$

N.B. Analizzando il sistema complessivamente non vengono più considerati i singoli contributi $\dot{S}_{Q_{in}}$ e $\dot{S}_{Q_{out}}$ ma la loro somma algebrica, ovvero l'irreversibilità.

Lezione del 27 settembre 2021

Le trasformazioni

In qualsiasi analisi di trasformazione si parte da una certa condizione di equilibrio (1) e si arriva ad un'altra condizione di equilibrio (2). Attraverso il termine "equilibrio" si intende che il sistema in esame ha temperatura, pressione e potenziale chimico omogeneo. Una trasformazione TIR prevede che, per ogni punto della trasformazione, vengano definite le grandezze intensive. Viceversa, per una trasformazione non-TIR, non sempre vengono definite le grandezze intensive: per questa ragione, nel grafico a lato, la trasformazione non-TIR viene rappresentata con una linea tratteggiata. Nota la condizione di equilibrio (1) si considera il suo intorno, dove le variazioni sono infinitesime e quindi T e P sono sempre definite.



$$dU = \delta Q_{in} - \delta L_{out} \rightarrow \text{Usando le definizioni di } Q \text{ ed } L \text{ per una TIR: } dU = TdS - PdV \rightarrow U = U(S, V)$$

Nella prima equazione vi sono dei differenziali non esatti, in quanto dU dipendeva dal percorso della trasformazione, mentre nella seconda vi sono differenziali esatti. La seconda equazione, complessivamente, è sempre vera in quanto è costituita da sole funzioni di stato: quindi essa è vera anche nel caso di una TIR. Tuttavia per una trasformazione **non-TIR non si ha l'esatta certezza che $\delta Q_{in} = TdS$ e $\delta L_{out} = PdV$** . L'unica condizione affinché l'equazione sia vera è che i valori di P e di T continuino ad essere definiti.

Variabili naturali di U

L'energia interna, rappresentata dall'equazione $U = U(S, V)$, non è altro che la funzione di due variabili naturali: S e V . Detto ciò è necessario rimuovere un vincolo relativo alla semplificazione del sistema, ovvero l'assenza di reazioni chimiche. Includendo alcuni aspetti della termodinamica relativa alle reazioni chimiche è possibile avere una descrizione ancora più ampia del sistema. Così come ad una variazione di temperatura viene associato un trasferimento di calore, allo stesso modo si può dire che, per una TIR, al **potenziale di interazione chimica μ** è possibile associare una **variazione di energia chimica E_{CH}** . L'espressione ampliata relativa ad U contempla, quindi, anche la variazione dell'energia chimica: $dU = TdS - PdV + \sum(\mu_i \cdot dN_i) \rightarrow U = U(S, V, N_i)$.

$$\delta E_{CH, in} = \sum(\mu_i \cdot dN_i), \text{ dove } N_i \text{ è il numero di moli della specie } i \text{ ed è una grandezza estensiva} \quad E_{CH, in} = \left[\frac{J}{mol} \right] [mol] = \text{Joule}$$

- **Caso in cui V ed N_i sono costanti**

Inserendo le condizioni appena riportate nell'equazione relativa all'energia interna si ottiene che: $dU = TdS - PdV + \sum(\mu_i \cdot dN_i) = TdS$. In particolare, per una TIR si ha che $dU = \delta Q_{in}$. Ciò significa che la variazione dU , nel caso di una TIR, è dovuto unicamente dal trasferimento di calore δQ da una parte all'altra del sistema composto, che deve rimanere in equilibrio nonostante la perturbazione. A questo punto è necessario applicare il **principio di minima energia**: *fissati S , V ed N_i se il sistema è in equilibrio esso deve assumere il valore minimo di energia*. Con V ed N_i costanti è necessario analizzare S . Il sistema complessivo non ha scambi di calore con l'esterno, quindi $S_{irr}^{est} = 0$, mentre internamente l'irreversibilità è nulla in quanto si tratta di una perturbazione di tipo TIR, quindi $S_{irr}^{int} = 0$. Il risultato finale è che $S_{tot} = S_{irr}^{est} + S_{irr}^{int} = 0$. In particolare, se $S_{irr}^{int} = 0$ allora si ha che $dS_{irr}^{int} = d(S_1 + S_2) = 0 \rightarrow dS_1 = -dS_2$. Essendo quindi anche S costante, vale il principio di minima energia all'equilibrio: $dU_{tot} = 0 \rightarrow d(U_1 + U_2) = dU_1 + dU_2 = \delta Q_{1, in} - \delta Q_{2, out} = T_1 dS_1 + T_2 dS_2 = 0$. Tuttavia, siccome S si conserva, è noto che $dS_1 = -dS_2$, dunque: $d(U_1 + U_2) = (T_2 - T_1) dS_2 = 0 \rightarrow T_1 = T_2$, oppure $dS_2 = 0$. **L'unico caso possibile è che le due temperature siano uguali** in quanto, se $dS_2 = 0$ vorrebbe dire che il sistema non è stato perturbato. Quindi con $T_1 = T_2$ si dimostra che il supporto formale utilizzato è corretto: in particolare **l'equazione relativa all'energia interna**, ovvero il primo principio della termodinamica, **ed il principio di minima energia**, che è una forma del secondo principio della termodinamica, **identificano la condizione di equilibrio termico**.

- **Caso in cui S ed N_i sono costanti**

Inserendo le condizioni appena riportate nell'equazione relativa all'energia interna si ottiene che $dU = TdS - PdV + \sum(\mu_i \cdot dN_i) = -PdV$. In particolare, per una TIR si ha che $dU = -\delta L_{out}$. Ciò significa che la variazione dU , nel caso di una TIR, è dovuto unicamente dallo scambio di lavoro δL all'interno del sistema, che deve rimanere in equilibrio nonostante la perturbazione. A questo punto è necessario applicare il **principio di minima energia**: *fissati S , V ed N_i se il sistema è in equilibrio esso deve assumere il valore minimo di energia*. Con S ed N_i costanti è necessario analizzare V . Il sistema complessivo non ha variazioni di volume, quindi $V_1 + V_2 = \text{costante} \rightarrow d(V_1 + V_2) = 0 \rightarrow dV_1 = -dV_2$. Essendo costante anche V , vale il principio di minima energia all'equilibrio: $dU_{tot} = 0 \rightarrow d(U_1 + U_2) = \delta L_{1, in} - \delta L_{2, out} = -P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = 0$. Siccome il volume si conserva, si ha che $V_2 = -V_1$, dunque: $d(U_1 + U_2) = (P_1 - P_2) dV_2 = 0 \rightarrow P_1 = P_2$, oppure $dV_2 = 0$. **L'unico caso possibile è che le due pressioni siano uguali**, in quanto se $dV_2 = 0$ vorrebbe dire che il sistema non è stato perturbato. Quindi con $P_1 = P_2$ si dimostra che l'equazione relativa all'energia interna ed il principio di minima energia identificano la **condizione di equilibrio di tipo meccanico**.

- **Caso in cui V ed S sono costanti**

Inserendo le condizioni appena riportate nell'equazione dell'energia interna si ottiene che $dU = TdS - PdV + \sum(\mu_i \cdot dN_i) = -\sum(\mu_i \cdot dN_i)$. In particolare, per una TIR si ha che $dU = \delta E_{CH}$. Ciò significa che la variazione dU , nel caso di una TIR, è dovuto unicamente dal trasferimento di energia chimica δE_{CH} da una parte all'altra del sistema composto, che deve rimanere in equilibrio nonostante la perturbazione. A questo punto si applica il principio di minima energia: *fissati S , V ed N_i se il sistema è in equilibrio esso deve assumere il valore minimo di energia*. Con V ed S costanti è necessario analizzare N_i . Il sistema complessivo, avente una membrana che filtra una determinata specie chimica, genera una variazione di concentrazione di quest'ultima: tuttavia, il numero complessivo di moli resta lo stesso. Quindi si ha che $N_{i,1} + N_{i,2} = \text{costante}$, ovvero $d(N_{i,1} + N_{i,2}) = 0 \rightarrow dN_{i,1} + dN_{i,2} = 0 \rightarrow dN_{i,1} = -dN_{i,2}$. Essendo costante anche N_i , vale il principio di minima energia all'equilibrio: $dU_{tot} = 0 \rightarrow d(U_1 + U_2) = \delta E_{CH,1, in} - \delta E_{CH,2, out} = \sum(\mu_{i,1} \cdot dN_{i,1}) + \sum(\mu_{i,2} \cdot dN_{i,2}) = 0$. Tuttavia, siccome N_i si conserva, è noto che $dN_{i,1} = -dN_{i,2}$, dunque $d(U_1 + U_2) = \sum(\mu_{i,2} - \mu_{i,1}) dN_{i,2} = 0 \rightarrow \mu_{i,2} = \mu_{i,1}$, oppure $dN_{i,2} = 0$. **L'unico caso possibile è che i due potenziali di interazione chimica siano uguali**, in quanto se $dN_{i,2} = 0$ vorrebbe dire che il sistema non è perturbato. Quindi, attraverso l'equazione relativa all'energia interna ed il principio di minima energia, si identifica la condizione per cui $\mu_{i,2} = \mu_{i,1}$, ovvero la **condizione di equilibrio chimico**.

I potenziali termodinamici

I potenziali termodinamici sono delle grandezze che vengono costruite a partire dall'energia interna. Un esempio è l'Entalpia (H).

$$H = U + PV \rightarrow dH = d(U + PV) \rightarrow dH = dU + d(PV) = dU + dP \cdot V + P \cdot dV$$

$$\text{Con } dU = T \cdot dS - P \cdot dV + \sum (\mu_i \cdot dN_i) \rightarrow dH = T \cdot dS - P \cdot dV + \sum (\mu_i \cdot dN_i) + dP \cdot V + P \cdot dV \rightarrow dH = T \cdot dS + \sum (\mu_i \cdot dN_i) + dP \cdot V$$

- L'equazione dell'**energia interna** risulta essere molto comoda quando N_i e V sono costanti. Infatti si ha che $dU = T \cdot dS = \delta Q_{in}^{tir}$.
- L'equazione relativa all'**entalpia**, invece, risulta molto comoda quando N_i e P sono costanti. Infatti, si ha che $dH = T \cdot dS = \delta Q_{in}^{tir}$.

Applicando il principio di energia minima anche per l'entalpia si ottiene che **per H_{tot} minima $T_1 = T_2$** . Ciò significa che è **possibile utilizzare il secondo principio della termodinamica**, in questo caso come principio dell'energia minima, **per tutti i potenziali termodinamici**.

Energia libera di Helmholtz

L'energia di Helmholtz (F) è definita attraverso la seguente equazione: $F = U - TS$. In termini infinitesimi si ha che $dF = d(U - TS)$.

$$dF = d(U - TS) \rightarrow dF = dU - d(TS) \rightarrow dF = [T \cdot dS - P \cdot dV + \sum (\mu_i \cdot dN_i)] - (dT \cdot S + T \cdot dS) \rightarrow dF = -P \cdot dV + \sum (\mu_i \cdot dN_i) - dT \cdot S$$

Quando N_i e T sono costanti si ha che $dF = -P \cdot dV = -\delta L_{out}^{tir}$. Applicando il principio di energia minima anche per l'energia libera di Helmholtz si ha che per **F_{tot} minima $P_1 = P_2$** .

Energia libera di Gibbs

L'energia libera di Gibbs (G) è definita attraverso la seguente equazione: $G = H - TS$. In termini infinitesimi si ha che $dG = d(H - TS)$.

$$dG = d(H - TS) \rightarrow dG = dH - d(TS) \rightarrow dG = [T \cdot dS + \sum (\mu_i \cdot dN_i) + dP \cdot V] - (dT \cdot S + T \cdot dS) \rightarrow dG = -S \cdot dT + V \cdot dP + \sum (\mu_i \cdot dN_i)$$

Quando T e P sono costanti si ha che $dG = \sum (\mu_i \cdot dN_i)$. Applicando il principio di energia minima anche per l'energia libera di Gibbs si ha che per **G_{tot} minima $\mu_{i1} = \mu_{i2}$** .

Le equazioni di stato

È utile esprimere grandezze di interesse come energia interna, entalpia ed entropia in funzione di **grandezze e proprietà della materia misurabili**. Per effettuare questo passaggio bisogna introdurre alcuni **coefficienti relativi alle proprietà misurabili della materia**.

Calore specifico	Coefficienti termovolumetrici
$C_{v,cost} = T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{v,cost} \rightarrow \text{Per una TIR: } C_{v,cost} = \left(\frac{\delta Q_{in}^{tir}}{dT}\right)_{v,cost}$	$K_P = \text{Coefficiente dilatazione isobara} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{P,cost}$
$C_{P,cost} = T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,cost} \rightarrow \text{Per una TIR: } C_{P,cost} = \left(\frac{\delta Q_{in}^{tir}}{dT}\right)_{P,cost}$	$K_T = \text{Coefficiente comprimibilità isoterma} = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_{T,cost}$

N.B. Il segno “-“ per il coefficiente di comprimibilità isoterma è dovuto ad una conseguenza della comprimibilità. In particolare una variazione positiva della pressione comporta una variazione negativa del volume, e viceversa.

$$\begin{cases} u = u(s, v) \\ h = h(s, P) \\ s = s(u, v) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = u(T, v) \\ h = h(T, P) \\ s = s(T, v) \end{cases}$$

Proprietà matematiche di U, S, H, F e G

Attraverso la trasformata di Legendre si dimostra che H, F e G hanno le stesse proprietà di U ed S.

Il teorema di Schwarz afferma che la derivata seconda di una funzione derivata prima rispetto ad "x" e poi rispetto ad "y" è pari alla derivata seconda della stessa funzione derivata prima rispetto ad "y" e poi rispetto ad "x". Al fine di poter applicare il teorema appena enunciato è necessario che la funzione sia derivabile due volte in \mathbb{R} [$f \in C^2(\mathbb{R})$] e che sia monotona. Tuttavia, a priori, è possibile affermare che U, S, H, F e G siano monotone e che siano derivabili due volte in \mathbb{R} .

$f \in C^2(\mathbb{R})$
monotone



$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{Teorema di Schwarz}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -1$$

Relazioni di Maxwell

1. Applicazione di Schwarz ad F ($df = -s dT - P dv$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial v} \rightarrow \text{Prima derivata: } \left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{v=\text{cost}} = -s \rightarrow \text{Seconda derivata: } -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial T} \rightarrow \text{Prima derivata: } \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{T=\text{cost}} = -P \rightarrow \text{Seconda derivata: } -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial T} \rightarrow -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \rightarrow \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -1 \rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \cdot v \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -K_P \cdot \frac{1}{-K_T} = \frac{K_P}{K_T}$$

2. Applicazione di Schwarz a G ($dg = -s dT + v dP$)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial P} \rightarrow \text{Prima derivata: } \left.\frac{\partial g}{\partial T}\right|_{P=\text{cost}} = -s \rightarrow \text{Seconda derivata: } -\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial P \partial T} \rightarrow \text{Prima derivata: } \left.\frac{\partial g}{\partial P}\right|_{T=\text{cost}} = +v \rightarrow \text{Seconda derivata: } +\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial P} = \frac{\partial^2 g}{\partial P \partial T} \rightarrow -\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \rightarrow \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -v \cdot K_P$$

3. Applicazione di Schwarz ad U ($du = T ds - P dv$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v} \rightarrow \text{Prima derivata: } \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{v=\text{cost}} = +T \rightarrow \text{Seconda derivata: } +\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial s} \rightarrow \text{Prima derivata: } \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{s=\text{cost}} = -P \rightarrow \text{Seconda derivata: } -\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_v$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial s} \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_v$$

4. Applicazione di Schwarz ad H ($dh = T ds + v dP$)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial P} \rightarrow \text{Prima derivata: } \left.\frac{\partial h}{\partial s}\right|_{P=\text{cost}} = +T \rightarrow \text{Seconda derivata: } +\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial P \partial s} \rightarrow \text{Prima derivata: } \left.\frac{\partial h}{\partial P}\right|_{s=\text{cost}} = +v \rightarrow \text{Seconda derivata: } +\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_P$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial P} = \frac{\partial^2 h}{\partial P \partial s} \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_P$$

Equazioni di stato

$s = s(T, v)$	$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \cdot dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \cdot dv = \frac{C_v}{T} \cdot dT + \frac{K_p}{K_T} \cdot dv$	$ds = \frac{C_v}{T} \cdot dT + \frac{K_p}{K_T} \cdot dv$
$s = s(T, P)$	$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P \cdot dT + \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T \cdot dP = \frac{C_p}{T} \cdot dT - v \cdot K_p \cdot dP$	$ds = \frac{C_p}{T} \cdot dT - v \cdot K_p \cdot dP$
$u = u(T, v)$	$du = Tds - Pd v = \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right _{v=const} \cdot dT + \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right _{T=const} \cdot dv$ $\begin{cases} \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right _{v=const} = \left(\frac{T\partial s}{\partial T}\right)_v \\ \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right _{T=const} = \left(\frac{T\partial s}{\partial v}\right)_T - P \end{cases}$ $du = \left(\frac{T\partial s}{\partial T}\right)_v \cdot dT + \left(\frac{T\partial s}{\partial v}\right)_T \cdot dv - P \cdot dv = C_v \cdot dT + T \cdot \frac{K_p}{K_T} \cdot dv - P \cdot dv$	$du = C_v \cdot dT + T \cdot \frac{K_p}{K_T} \cdot dv - P \cdot dv$
$h = h(T, P)$	$dh = Tds + v dP = \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right _{P=const} \cdot dT + \left.\frac{\partial h}{\partial P}\right _{T=const} \cdot dP$ $\begin{cases} \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right _{P=const} = \left(\frac{T\partial s}{\partial T}\right)_P \\ \left.\frac{\partial h}{\partial P}\right _{T=const} = \left(\frac{T\partial s}{\partial P}\right)_T + v \end{cases}$ $dh = \left(\frac{T\partial s}{\partial T}\right)_P \cdot dT + \left(\frac{T\partial s}{\partial P}\right)_T \cdot dP + v \cdot dP = C_p \cdot dT - T \cdot v \cdot K_p \cdot dP + v dP$	$dh = C_p \cdot dT - T \cdot v \cdot K_p \cdot dP + v dP$

Lezione del 29 settembre 2021

Gas ideali

Tutte le sostanze, in certe condizioni, si comportano come un gas ideale. I modelli utilizzati in ambito ingegneristico, tra cui i gas ideali, sono utili per fini applicativi. È stato riscontrato empiricamente un determinato comportamento per alcuni gas in certe condizioni. Fissato un determinato volume di gas, aumentando o diminuendo la temperatura c'è una conseguente variazione di pressione: per alcuni gas si evince che i relativi grafici hanno un andamento lineare. A partire da questa osservazione empirica è stato costruito un modello: $Pv = RT$. In alternativa l'equazione relativa al modello di gas ideale può essere espressa come segue: $PV = nRT \cdot \frac{m}{m} \rightarrow PV = m \frac{R}{M} T$, dove $M = \frac{m}{n} \rightarrow PV = m \mathcal{R}_i T$, dove $\frac{R}{M_i} = \mathcal{R}_i$. L'ultima variabile ricava e inserita nella relazione fondamentale dei gas ideali, ovviamente, dipende dal gas: in modo generico viene chiamato "R" di "i". Dunque la relazione fondamentale può essere specifica alle moli, come nel primo caso e specifica alla massa, come nel secondo caso. Una volta stabilite le due diverse forme della legge dei gas ideali è necessario calcolare K_T e K_P .

$$Pv = RT \rightarrow v = \frac{RT}{P}$$

$$K_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \rightarrow \text{con } R \text{ e } T \text{ costanti: } -\frac{1}{v} \left(-\frac{RT}{P^2}\right) = \frac{1}{P} \left(\frac{RT}{vP}\right) = \frac{1}{P} \rightarrow K_T = \frac{1}{P}$$

$$K_P = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \rightarrow \text{con } R \text{ e } P \text{ costanti: } \frac{1}{v} \left(\frac{R}{P}\right) = \frac{1 \cdot R}{vP} \rightarrow K_P = \frac{1}{T}$$

$s = s(T, v)$	$ds = \frac{C_v}{T} \cdot dT + \frac{K_p}{K_T} \cdot dv$	Con $K_T = \frac{1}{P}$ Con $K_P = \frac{1}{T}$	$ds = \frac{C_v}{T} \cdot dT + \frac{R}{v} \cdot dv$	$s_2 - s_1 = C_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$
$s = s(T, P)$	$ds = \frac{C_p}{T} \cdot dT - v \cdot K_p \cdot dP$		$ds = \frac{C_p}{T} \cdot dT - \frac{R}{P} \cdot dP$	$s_2 - s_1 = C_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$
$u = u(T, v)$	$du = C_v \cdot dT + T \cdot \frac{K_p}{K_T} \cdot dv - P \cdot dv$		$du = C_v dT$	$u_2 - u_1 = C_v(T_2 - T_1)$
$h = h(T, P)$	$dh = C_p \cdot dT - T \cdot v \cdot K_p \cdot dP + v dP$		$dh = C_p dT$	$h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1)$
N.B. Risulta essere molto utile sfruttare l'equazione dei gas ideali per rendere più semplici gli integrali. Ad esempio, per l'integrale dell'entropia è molto più semplice effettuare gli integrali di $\frac{dv}{v}, \frac{dt}{t}$ e $\frac{dp}{p}$.				

Legge di Mayer: $\Delta s = \Delta s \rightarrow C_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = C_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \rightarrow (C_p - C_v) \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = R \cdot \left[\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)\right]$

$$(C_p - C_v) \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = R \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \rightarrow C_p - C_v = R \rightarrow \begin{cases} C_p - C_v = R, \text{ specifico alle moli} \\ \bar{C}_p - \bar{C}_v = \mathcal{R} = \frac{R}{M}, \text{ specifico alle masse} \end{cases}$$

Le trasformazioni politropiche per gas ideali

Una trasformazione viene definita politropica se essa è internamente reversibile, se il gas in questione si comporta come un gas ideale e se il calore specifico, generico, è costante durante la trasformazione.

$$Pv = RT \quad C_x = \left(T \frac{\partial S}{\partial T} \right)_x \rightarrow C_x dT = T dS \quad du = C_v \cdot dT$$

$$\text{Con } du = T ds - P dv \rightarrow C_v \cdot dT = C_x \cdot dT - P dv$$

$$C_v \cdot dT = C_x \cdot dT - P dv \rightarrow C_v \cdot dT - C_x \cdot dT = -P dv \rightarrow C_x \cdot dT - C_v \cdot dT = P dv \rightarrow (C_x - C_v) \cdot dT = P dv$$

$$(C_x - C_v) \cdot d \left(\frac{Pv}{R} \right) = P dv \rightarrow (C_x - C_v) \cdot d(Pv) = R \cdot P dv \rightarrow (C_x - C_v) \cdot (P dv + v dP) = R \cdot P dv \rightarrow (C_x - C_v) \cdot v dP = (R + C_v - C_x) \cdot P dv$$

$$(C_x - C_v) \cdot \frac{dP}{P} = (R + C_v - C_x) \cdot \frac{dv}{v} \rightarrow (C_x - C_v) \cdot \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = (R + C_v - C_x) \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

$$\text{Con } C_p - C_v = R \rightarrow C_p = R + C_v \text{ si ha che: } (C_x - C_v) \cdot \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = (C_p - C_x) \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \rightarrow (C_x - C_v) \cdot \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = (C_x - C_p) \cdot \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right)$$

$$\ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \frac{(C_x - C_p)}{(C_x - C_v)} \cdot \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right) \rightarrow \frac{(C_x - C_p)}{(C_x - C_v)} = n = \text{indice della politropica} \rightarrow \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = n \cdot \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right) \rightarrow \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \ln \left[\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^n \right] \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^n$$

$$P_1 v_1^n = P_2 v_2^n \rightarrow P_1 (m \cdot v_1)^n = P_2 (m \cdot v_2)^n \rightarrow P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$$

L'espressione ottenuta è molto utile per analizzare la trasformazione in esame poiché, se sono noti l'indice della politropica, i valori di pressione e volume allo stato (1), ed anche il valore della pressione o del volume allo stato (2) è possibile ottenere, rispettivamente, il volume o la pressione allo stato (2). Noti i valori di pressione e volume allo stato (2) è possibile ottenere il valore della temperatura allo stato (2) grazie alle legge dei gas ideali. **Conoscendo queste tre grandezze è possibile calcolare i valori di entropia, entalpia ed energia interna.**

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1}$$

Trasformazione isoentropica – Trasformazione TIR di un gas ideale

Una trasformazione isoentropica TIR equivale ad una trasformazione adiabatica: quanto appena affermato lo si può infatti dedurre dalla definizione di calore per una TIR. In particolare è valida la seguente equazione per cui $q_{in} = \int T ds \rightarrow$ *Trasformazione isoentropica*: $ds = 0 \rightarrow q_{in} = 0$. Inoltre, siccome $C_x = \left(T \frac{\partial S}{\partial T} \right)_x \rightarrow C_x dT = T dS$, si ha che $q_{in} = \int C_x dT = 0$. Siccome non è possibile stabilire a priori se la variazione di temperatura sia nulla, affinché l'equazione sia sempre vera è necessario porre $C_x = 0$. Ne consegue che $n = \frac{(C_x - C_p)}{(C_x - C_v)} = \frac{C_p}{C_v}$. Essendo una trasformazione internamente reversibile, con calore specifico costante durante la trasformazione, ed assunto che la sostanza in esame si comporti come un gas ideale tale trasformazione è di tipo politropica. Ciò significa che valgono anche le relazioni ottenute in precedenza.

$$P_1 v_1^n = P v^n \rightarrow P = P_1 \left(\frac{v_1}{v} \right)^n \rightarrow P = P_1 \left(\frac{v_1}{v} \right)^{\frac{C_p}{C_v}} \rightarrow \text{La pressione aumenta al diminuire del volume}$$

$$T = \frac{PV}{nR} \rightarrow \text{La temperatura aumenta al diminuire del volume}$$

Per verificare quanto appena ottenuto si effettua una analisi energetica per una sistema chiuso. Si ipotizza di avere una sistema cilindro-pistone adiabatico in cui il pistone compie un lavoro entrante.

$$u_1 + l_{in} = u_2 \rightarrow u_2 + u_1 = l_{in} \rightarrow C_v(T_2 - T_1) = l_{in}$$

Tuttavia se il lavoro entrante è positivo significa che entrambi i termini C_v e ΔT sono diversi da zero e che il loro prodotto è positivo. Ciò conferma quanto detto inizialmente, ovvero che $\Delta T \neq 0$ e che $q_{in} = \int C_x dT = 0$ in quanto C_x è nullo.

$$l_{in, chiuso} = - \int P dv = (u_2 - u_1) - q_{in}$$

$$l_{out, chiuso} = \int P dv = -(u_2 - u_1) + q_{in}$$

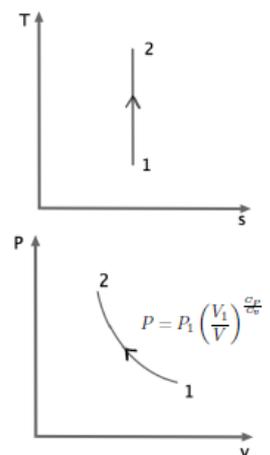
Nel caso di un sistema aperto il bilancio energetico sarebbe il seguente: $\dot{m} \cdot h_1 + l_{in} = \dot{m} \cdot h_2 \rightarrow l_{in} = \dot{m} \cdot h_2 - \dot{m} \cdot h_1 \rightarrow l_{in} = \dot{m}(h_2 - h_1)$.

$$l_{in} = \dot{m}(h_2 - h_1) \rightarrow l_{in} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Tuttavia se il lavoro entrante è positivo significa che i termini C_p , \dot{m} e ΔT sono diversi da zero e che il loro prodotto è positivo. Ciò conferma quanto detto inizialmente, ovvero che $\Delta T \neq 0$ e che $q_{in} = \int C_x dT = 0$ in quanto C_x è nullo.

$$l_{in, aperto} = \int v dP = (h_2 - h_1) - q_{in}$$

$$l_{out, aperto} = - \int v dP = -(h_2 - h_1) + q_{in}$$



Trasformazione isoterma – Trasformazione TIR di un gas ideale

Essendo una trasformazione internamente reversibile, con calore specifico costante durante la trasformazione, ed assunto che la sostanza in esame si comporti come un gas ideale tale trasformazione è di tipo politropica.

$$q_{in} = \int T ds = T \int ds = T \cdot \Delta S = T \cdot \left(C_v \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \right)$$

$$q_{in} = \int T ds = T \int ds = T \cdot \Delta S = T \cdot \left(C_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right)$$

$$T \cdot \left(C_v \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \right) = T \cdot \left(C_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \cdot \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \right) \rightarrow \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) = \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

Tuttavia per una trasformazione politropica si ha che: $P_1 v_1^n = P_2 v_2^n \rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n = \frac{P_1}{P_2}$.

Affinchè entrambe le relazioni siano vere è necessario che l'indice di politropica (n) sia pari ad 1.

$$n = 1 \rightarrow \frac{(C_x - C_p)}{(C_x - C_v)} = 1 \rightarrow C_p \neq C_v \text{ per la legge di Mayer, quindi } C_x \text{ è infinitamente più grande di } C_p \text{ e } C_v$$

Quanto appena ricavato trova conferma anche nella definizione di calore: $q_{in} = \int C_x dT$. Infatti, se il calore è una quantità diversa da zero e $dT = 0$, allora significa che $C_x \rightarrow \infty$.

Si consideri un sistema cilindro-pistone avente calore in ingresso e lavoro in uscita ed il relativo bilancio energetico.

$$u_1 + q_{in} = l_{out} + u_2 \rightarrow (u_2 - u_1) + l_{out} = q_{in} \rightarrow C_v(T_2 - T_1) + l_{out} = q_{in} \rightarrow \text{Siccome } T_2 = T_1 \text{ (Isoterma)} \rightarrow l_{out} = q_{in} \text{ ed } u_2 = u_1$$

$$l_{out, chiuso} = q_{in} = \int T ds = R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \quad \text{oppure} \quad l_{out, chiuso} = \int P dv = \int \frac{R \cdot T}{v} dv = R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

N.B. Non viene violato Kelvin in quanto la pressione varia da P_1 a P_2 , il volume varia da V_1 a V_2 e l'entropia varia da s_1 ad s_2 . Ciò significa che la conversione di calore in lavoro non è l'unica trasformazione effettuata all'interno del sistema.

$$\text{Invece per un sistema aperto si ha che: } l_{out, aperto} = - \int v dP = - \int \frac{R \cdot T}{P} dP = -R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

Trasformazione isobara – Trasformazione TIR di un gas ideale

Essendo una trasformazione internamente reversibile, con calore specifico costante durante la trasformazione, ed assunto che la sostanza in esame si comporti come un gas ideale tale trasformazione è di tipo politropica. In particolare, si tratta di una trasformazione a pressione costante.

$$q_{in} = \int C_x dT = \int C_p dT \quad \text{Siccome } C_x = C_p \text{ si ha che } n = \frac{(C_x - C_p)}{(C_x - C_v)} = 0$$

Quanto appena affermato trova conferma anche nella relazione fondamentale di una generica politropica: $P_1 v_1^n = P_2 v_2^n \rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n = \frac{P_1}{P_2}$. Essendo però la pressione costante si ha che $\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n = \frac{P_1}{P_2} = 1$: affinché sia possibile è necessario che $n = 0$. Per quanto riguarda, invece, la variazione di entropia si ha che: $s_2 - s_1 = C_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \rightarrow s_2 - s_1 = C_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \rightarrow T_2 = T_1 e^{\frac{s_2 - s_1}{C_p}}$.

Si consideri un sistema cilindro-pistone avente calore in ingresso e lavoro in uscita ed il relativo bilancio energetico.

$$u_1 + q_{in} = l_{out} + u_2 \rightarrow (u_2 - u_1) + l_{out} = q_{in} \rightarrow \text{Siccome } l_{out, chiuso} = \int P dv = P(v_2 - v_1) \text{ ed } u_2 - u_1 = C_v(T_2 - T_1) \rightarrow C_v dT + P dv = C_p dT$$

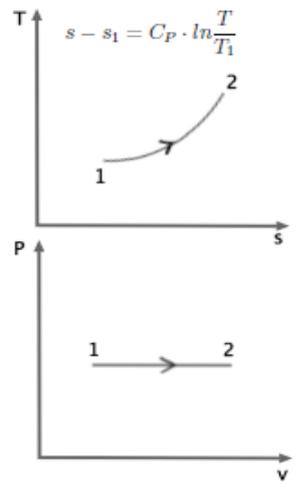
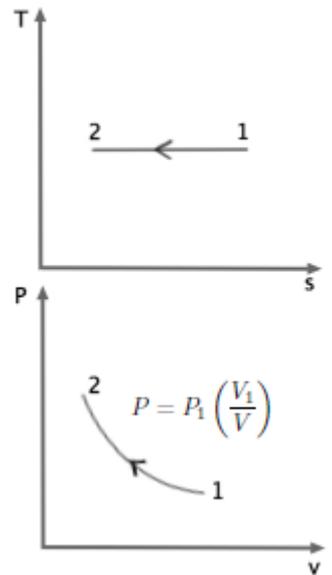
$$C_v dT + P dv = C_p dT \rightarrow C_v dT + R dT = C_p dT \rightarrow C_p - C_v = R$$

$$\text{Invece per un sistema aperto si ha che: } l_{out, aperto} = - \int v dP \rightarrow \text{Ma in una isobara si ha che } dP = 0 \rightarrow l_{out, aperto} = 0$$

Ciò significa che in un sistema aperto un'isobara ha lavoro scambiato nullo. Ciò lo si evince anche dal bilancio energetico.

$$\text{Sistema aperto: } h_1 + q_{in} = h_2 \rightarrow h_2 - h_1 = q_{in} \rightarrow \begin{cases} q_{in} = C_p \Delta T \text{ (per una isobara)} \\ dh = C_p \Delta T \text{ (generico)} \end{cases}$$

N.B. La variazione dell'entropia, sia per il sistema aperto che per quello chiuso, è la medesima. In particolare si ha che $dh = C_p \Delta T = q_{in}$. Dal punto di vista energetico, invece, si ha che $l_{out} + u_2 - u_1 = q_{in}$. Di conseguenza, è possibile affermare che l'entropia "comprende" sia la variazione di energia interna (du), sia il lavoro compiuto dal sistema (l_{out}).



Trasformazione isocora – Trasformazione TIR di un gas ideale

Essendo una trasformazione internamente reversibile, con calore specifico costante durante la trasformazione, ed assunto che la sostanza in esame si comporti come un gas ideale tale trasformazione è di tipo politropica. In particolare, si tratta di una trasformazione a volume costante.

$$q_{in} = \int C_x dT = \int C_v dT \quad \text{Siccome } C_x = C_v \text{ si ha che } n = \frac{(C_x - C_p)}{(C_x - C_v)} = \infty$$

Quanto appena affermato trova conferma anche nella relazione fondamentale di una generica politropica: $P_1 v_1^n = P_2 v_2^n$. Infatti per $n = \infty$ si ha che i termini P_1 e P_2 sono trascurabili e l'equazione diventa $v_1 = v_2$. Per quanto riguarda, invece, la variazione di entropia si ha che:

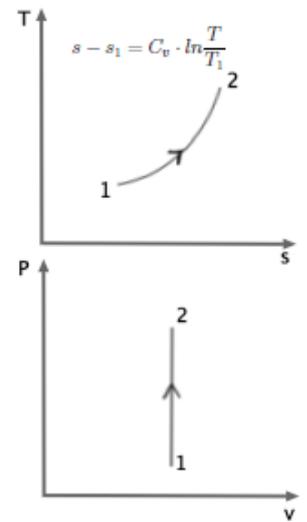
$$s_2 - s_1 = C_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \rightarrow s_2 - s_1 = C_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \rightarrow T_2 = T_1 e^{\frac{s_2 - s_1}{C_v}}$$

Confrontando la variazione di temperatura in funzione dell'entropia della trasformazione isocora con quella della trasformazione isobara si nota che quest'ultima è sempre maggiore in quanto, per definizione, $C_p > C_v$.

Si consideri un sistema cilindro-pistone avente calore in ingresso.

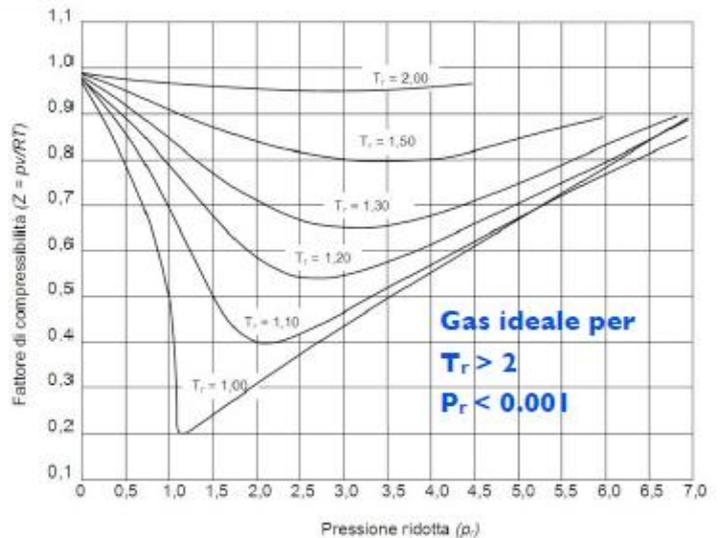
$$l_{out, chiuso} = \int P dv = P(v_2 - v_1) = 0$$

Per un sistema aperto si ha che: $l_{out, aperto} = - \int v dP$ In questo caso $dP > 0 \rightarrow l_{out, aperto} < 0$, ovvero il lavoro è entrante.



Gas reali: fattore di comprimibilità

Affinchè sia possibile stabilire il campo di validità dei gas ideali viene introdotto il fattore di comprimibilità $z(P, T)$. Ne consegue che la legge dei gas $Pv = RT$ diventa $Pv = z(P, T)RT$. Ogni gas è caratterizzato da una pressione critica e da una temperatura critica, due valori oltre i quali il comportamento dei relativi gas cambia in maniera evidente. La pressione ridotta e la temperatura ridotta, invece, sono rispettivamente il rapporto tra la pressione misurata e la temperatura critica ed il rapporto tra la temperatura misurata e la temperatura critica. Attraverso dati sperimentali riportati nel grafico di seguito si evince che per **valori di pressione molto bassi** si ha che il fattore di comprimibilità è pari ad uno e quindi il gas si comporta come un gas ideale. Allo stesso modo, quando la **temperatura ridotta ha valori superiori a due**, si ha che il fattore di comprimibilità è pari ad uno e quindi il gas si comporta come un gas ideale.



$$\text{Gas ideale se } T_r = \frac{T}{T_{cr}} > 2 \text{ oppure } P_r = \frac{P}{P_{cr}} < 0,001$$

Gas reali: Van der Waals

Nel caso in cui non fossero rispettate le condizioni soprariportate non è possibile considerare il gas in esame come un gas ideale. A meno che non vi siano discostamenti importanti dal comportamento ideale, come per esempio per $Z = 0,2$, è possibile utilizzare dei modelli più o meno realistici: uno di essi è il modello di Van der Waals.

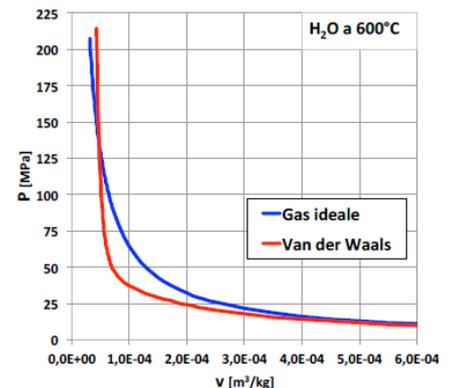
$$P_{ideale} v_{ideale} = RT \rightarrow \left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \text{ dove } v = v_{ideale} + b \text{ e } P = P_{ideale} - \frac{a}{v^2}$$

L'equazione appena riportata considera che, per quanto si possa ridurre il volume ideale fino a valori prossimi allo zero, subentrerà sempre un valore minimo, detto **covolume (b)**, dovuto a forze repulsive. Inoltre, la stessa equazione, tiene conto anche delle forze attrattive: infatti la pressione "reale" sulle superfici di un ipotetico risulta essere inferiore rispetto alla pressione "ideale" in quanto quest'ultima risulta essere diminuita di una quantità pari alla pressione di coesione $\left(\frac{a}{v^2}\right)$.

N.B. Se il gas è rarefatto le forze repulsive ed attrattive tra molecole sono trascurabili.

Nel grafico riportato a destra si nota che per valori di volume molto alti i valori della pressione coincidono. Tuttavia, diminuendo il volume, si nota un discostamento tra il comportamento ideale e quello reale descritto dall'equazione di Van der Waals, in particolare l'equazione dei gas ideali sovrastima i valori della pressione rispetto all'equazione di Van der Waals. Quanto si verifica è perfettamente coerente in quanto entrano in gioco le forze attrattive che riducono la pressione totale sulle pareti. Tuttavia, continuando a diminuire il volume, entrano in gioco le forze repulsive e quindi il covolume. Anche in questo caso è tutto perfettamente coerente in quanto il covolume aumenta la quantità di volume totale rispetto al volume ideale.

N.B. Nel caso in esame le forze attrattive entrano in gioco a circa 20 MPa, mentre le forze repulsive a circa 150 MPa. Quindi in condizioni non rilevati a livello ingegneristico.



Lezione del 4 ottobre 2021

Liquidi e solidi ideali

Mediante osservazioni empiriche si osserva che, in certe condizioni, per alcuni liquidi e solidi si ha, a seguito di una trasformazione, una variazione di volume prossima allo zero: tali sostanze vengono chiamate liquidi e solidi ideali. In breve, esse prevedono volume costante nelle trasformazioni.

Liquidi e solidi ideali $\rightarrow v = \text{costante}$

$K_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = 0$	$K_P = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = 0$
$ds = \frac{C_v}{T} \cdot dT + \frac{K_P}{K_T} \cdot dv \rightarrow ds = \frac{C_v}{T} \cdot dT$	$du = C_v \cdot dT + T \cdot \frac{K_P}{K_T} \cdot dv - P \cdot dv \rightarrow du = C_v \cdot dT$
$ds = \frac{C_P}{T} \cdot dT - v \cdot K_P \cdot dP \rightarrow ds = \frac{C_P}{T} \cdot dT$	$dh = C_P \cdot dT - T \cdot v \cdot K_P \cdot dP + v dP \rightarrow dh = C_P \cdot dT + v dP$
$\frac{C_v}{T} \cdot dT = \frac{C_P}{T} \cdot dT \rightarrow C_v = C_P$	
$u_2 - u_1 = C_v(T_2 - T_1)$	$s_2 - s_1 = C_P \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$
$h_2 - h_1 = C_P(T_2 - T_1) + v(P_2 - P_1)$	$s_2 - s_1 = C_v \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$

Trasformazioni per liquidi ideali – Isoentropica TIR

Secondo la definizione di calore in ingresso per una TIR, in funzione dell'entropia, si ha che una isoentropica è anche adiabatica: $q_{in} = \int T ds = \int C_x dT = 0$. Inoltre una trasformazione isoentropica per liquidi ideali è anche una isoterma, infatti se $s_2 - s_1 = 0$ si ha che $\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 0 \rightarrow T_2 = T_1$. Quanto appena detto trova conferma anche nella definizione di calore entrante: $q_{in} = \int C_x dT = 0$ se $dT = 0$. Si consideri un sistema cilindro-pistone adiabatico: ipotizzando di imprimere una forza F attraverso il pistone, logicamente aumenta la pressione esercitata dal liquido contenuto nel cilindro. Tuttavia, trattandosi di un liquido ideale, non vi è alcuna variazione di volume e quindi il lavoro scambiato ($l_{out, chiuso}$) è nullo.

$$l_{out, chiuso} = \int P dv = 0$$

Nel caso di un sistema aperto, invece, si pensi ad una turbina avente una portata massica in entrata ed una in uscita ed una elica attraverso cui viene "prodotto" del lavoro esterno ($l_{out, aperto}$).

$$l_{out, aperto} = - \int v dP = -v(P_2 - P_1)$$

Bilancio energetico (Sistema Aperto): $h_1 = l_{out} + h_2 \rightarrow l_{out} = h_2 - h_1 = C_x(T_2 - T_1) + v(P_2 - P_1)$

$$l_{out} = h_2 - h_1 = v(P_2 - P_1)$$

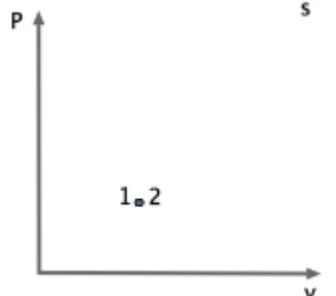
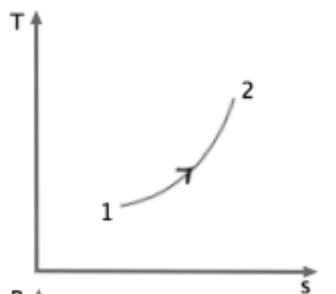
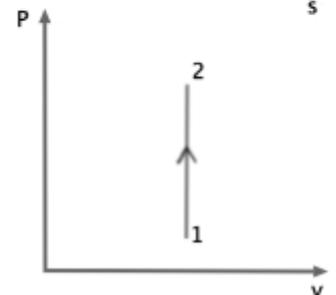
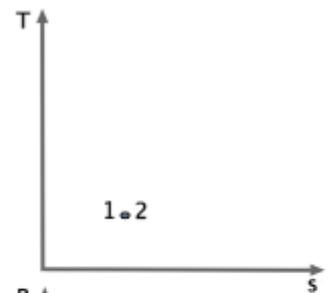
Trasformazioni per liquidi ideali – Isobara TIR

In tal caso non vi è temperatura costante e nemmeno entropia costante: quindi la trasformazione in esame non può più essere adiabatica. Infatti, introducendo del calore all'interno del sistema si ha che la temperatura, ed anche l'entropia, aumentano. Ciò lo si vince, ancora una volta, dalla definizione di calore: $q_{in} = \int T ds = \int C_x dT = 0$. Sia in un sistema chiuso, che per un sistema aperto, il lavoro in uscita sarà pari a zero.

$$l_{out, chiuso} = \int P dv = 0 \rightarrow \text{In quanto } dv = 0 \text{ per liquidi ideali}$$

$$l_{out, aperto} = - \int v dP = -v(P_2 - P_1) = 0 \rightarrow \text{In quanto } dP = 0 \text{ per trasformazione isobara}$$

Bilancio energetico (Sistema Aperto): $h_1 + q_{in} = h_2 \rightarrow q_{in} = h_2 - h_1 = C_x(T_2 - T_1)$



Sostanze pure reali

In una qualsiasi sostanza vi sono condizioni in cui essa si trova allo stato liquido, altre allo stato gassoso (vapore) ed altre in uno stato in cui coesistono stato liquido e gassoso (vapore). Si consideri il diagramma ottenuto sperimentalmente riportato di seguito, dove sono rappresentati i valori della temperatura al variare del volume specifico in una trasformazione isobara. La linea di sinistra rappresenta la curva limite inferiore, mentre la linea di destra la curva limite superiore: in questo caso il punto di giunzione tra le due linee è il punto critico, dove il grafico complessivo ha derivata nulla. A tale punto critico corrisponde una temperatura critica (T_{cr}).

In base a quanto detto precedentemente, ovvero che per $T_r = \frac{T}{T_{cr}} > 2$ un gas si definisce ideale, si può affermare che il relativo grafico si troverebbe molto più in alto rispetto alla funzione riportata accanto.

Si consideri dell'acqua a 20°C alla pressione di 1 atm ed un riscaldamento della stessa fino a 100°C sempre ad 1 atm: raggiunta tale temperatura inizia l'evaporazione. Questa trasformazione, però, avviene sia a pressione che a temperatura costante e vi è una coesistenza di fase liquida e gassosa (vapore) per tutta la sua durata. È noto che, a parità di sostanza, il volume specifico allo stato gassoso è maggiore di diversi ordini di grandezza rispetto allo stato liquido.

Quanto appena affermato trova conferma anche nel grafico rappresentato sopra: infatti, in corrispondenza dell'inizio della trasformazione, si ha un volume specifico (v_L), mentre al termine della stessa si ha un volume specifico (v_V) maggiore. Logicamente questi due valori sono costanti nel tempo ed è proprio grazie a questo aspetto che è possibile ottenere la seguente relazione matematica:

$$v(\text{volume medio}) = v_L \cdot \frac{m_L}{m_{tot}} + v_V \cdot \frac{m_V}{m_{tot}} \rightarrow m_{tot} \cdot v(\text{volume medio}) = v_L \cdot m_L + v_V \cdot m_V \rightarrow V_{tot} = v_L \cdot m_L + v_V \cdot m_V = V_{liquido} + V_{vapore}$$

Quando la curva di trasformazione interseca la curva limite superiore significa che tutta la quantità di liquido è stata trasformata in vapore. A partire da questo punto la trasformazione isobara prosegue ma senza cambiamenti di fase.

N.B. La trasformazione che avviene all'interno della campana è di tipo isothermobarica, ovvero a pressione e temperatura costante.

Ripetendo la stessa osservazione con dell'acqua, ma a pressione inferiore, si ottiene che il punto iniziale (sempre a 20°C) sarà più a destra rispetto al caso precedente, ma soprattutto che la temperatura della transizione di fase sarà inferiore, ovvero pari a circa 90°C. Ciò evidenzia come nelle transizioni di fase P e T siano correlati e che ad ogni valore di P corrisponde una sola temperatura di transazione di fase: in particolare vi è un rapporto di proporzionalità diretta tra le due grandezze.

Aumentando la pressione fino a valori prossimi al punto critico si ha un assottigliamento della trasformazione isothermobarica: ciò significa che per valori di pressione elevati vi è una graduale transizione di fase. Questo comporta che le differenze tra una sostanza allo stato liquido ed una allo stato gassoso (vapore) siano praticamente nulle: tale caratteristica è dovuta dagli elevati valori di pressione che non permettono l'annullamento delle forze attrattive tra le varie molecole.

Nel diagramma riportato di seguito sono rappresentati i valori della temperatura al variare del volume specifico in una trasformazione isoterma. Si consideri dell'acqua a 100°C alla pressione di 10 atm: mantenendo una temperatura costante ad abbassando la pressione fino ad 1 atm inizia l'evaporazione. Come nel caso precedente, questa trasformazione avviene sia a pressione che a temperatura costante e vi è una coesistenza di fase liquida e gassosa (vapore) per tutta la sua durata. Inoltre è possibile affermare che per tutta la durata della trasformazione isothermobarica vale la seguente relazione:

$$v(\text{volume medio}) = v_L \cdot \frac{m_L}{m_{tot}} + v_V \cdot \frac{m_V}{m_{tot}}$$

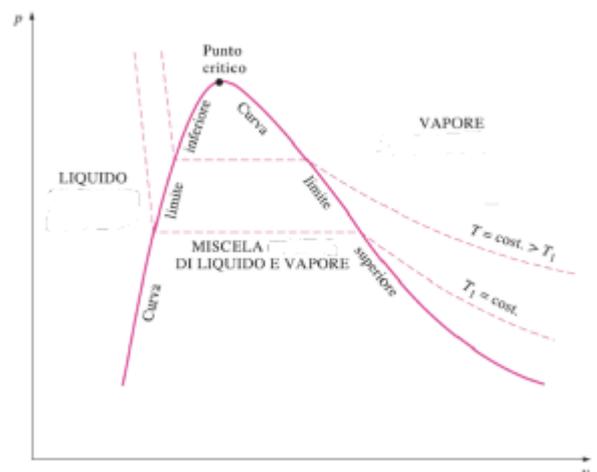
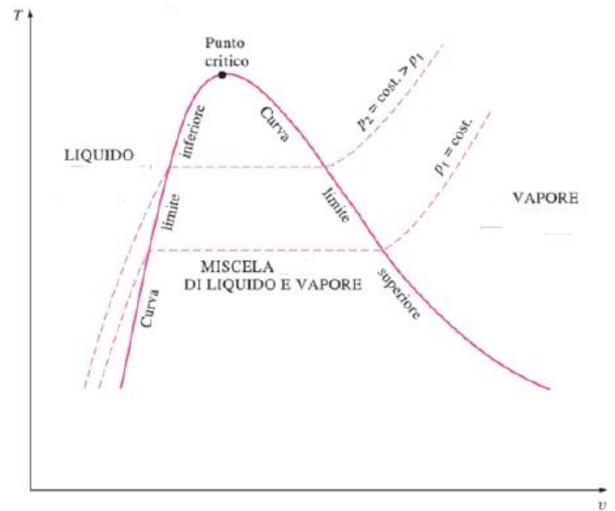
$$m_{tot} \cdot v(\text{volume medio}) = v_L \cdot m_L + v_V \cdot m_V$$

$$V_{tot} = v_L \cdot m_L + v_V \cdot m_V = V_{liquido} + V_{vapore}$$

Quando la curva di trasformazione interseca la curva limite superiore significa che tutta la quantità di liquido è stata trasformata in vapore. A partire da questo punto la trasformazione isoterma prosegue ma senza cambiamenti di fase.

Ripetendo la stessa osservazione con dell'acqua, ma a temperatura maggiore, si ottiene che il punto iniziale (sempre a 10 atm) sarà più a destra rispetto al caso precedente, ma soprattutto che la pressione della transizione di fase sarà maggiore, ovvero pari a circa 3 atm. Ciò evidenzia come nelle transizioni di fase P e T siano correlati e che ad ogni valore di P corrisponde una sola temperatura di transazione di fase: in particolare vi è un rapporto di proporzionalità diretta tra le due grandezze.

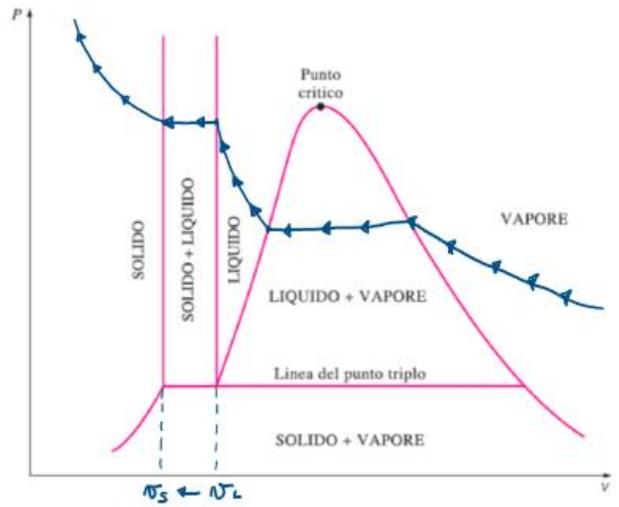
Aumentando la temperatura fino a valori prossimi al punto critico si ha un assottigliamento della trasformazione isothermobarica: ciò significa che per valori di temperatura elevati vi è una graduale transizione di fase. Questo comporta che le differenze tra una sostanza allo stato liquido ed una allo stato gassoso (vapore) siano praticamente nulle: tale caratteristica è dovuta dagli elevati valori di pressione che non permettono l'annullamento delle forze attrattive tra le varie molecole.



Transizioni di fase – Sostanza generica ($v_{solido} < v_{liquido}$)

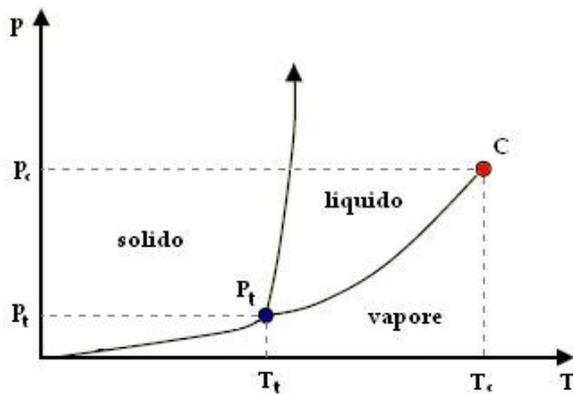
Si consideri una generica trasformazione isoterma rappresentata in un diagramma volume-pressione. Parte della rappresentazione della trasformazione isoterma coincide con quella rappresentata nel diagramma precedente: la differenza è situata nella parte sinistra del grafico, dove in questo caso vi è una zona di coesistenza di solido e liquido ed una zona in cui vi è la sostanza solamente allo stato solido. Come nel tratto di coesistenza di liquido e vapore, anche durante il passaggio da liquido a solido si ha una trasformazione isotermodarica. Quando la funzione interseca la linea di solido la trasformazione isoterma procede senza ulteriori transizioni di fase. Dal grafico in esame si evince che esiste un particolare fenomeno chiamato sublimazione che prevede il passaggio da vapore a solido, e viceversa. Inoltre si nota come una trasformazione isotermodarica caratterizzata da una pressione (P_{PT}) ed una temperatura (T_{PT}) preveda la coesistenza della fase solida, liquida e gassosa (vapore): la sua rappresentazione viene chiamata **linea del punto triplo**.

N.B. Al di sotto della linea del punto triplo, e quindi per pressioni inferiori a P_{PT} e temperature inferiori a T_{PT} , non vi è presenza di liquido.

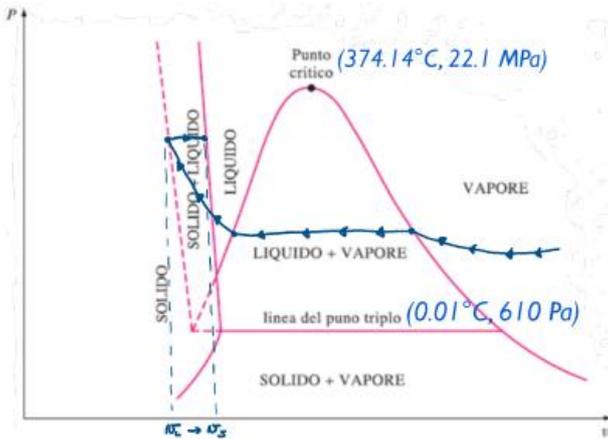


Nel grafico riportato a sinistra si notano le fasi di una qualsiasi sostanza al variare della pressione e della temperatura. È possibile, inoltre, notare alcune caratteristiche del diagramma in esame.

- La presenza di un punto critico, oltre il quale non vi è una netta differenza di fase (liquido, solido, vapore);
- La presenza di un punto triplo, in cui coesistono le tre fasi;
- Un incremento positivo della temperatura all'aumentare della pressione: ciò si verifica in quanto il volume specifico di una sostanza generica allo stato solido è minore rispetto al volume specifico di una sostanza generica allo stato liquido.



Transizioni di fase – Acqua ($v_{solido} > v_{liquido}$)

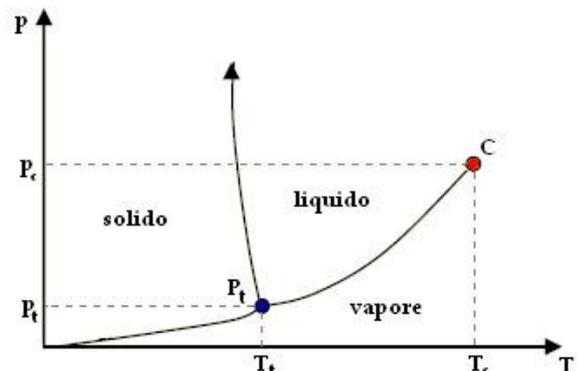


L'acqua ha una proprietà molto particolare relativa alle transizioni di fase: il volume specifico allo stato solido è maggiore rispetto al volume specifico allo stato liquido. Anche in questo caso si nota come una trasformazione isotermodarica caratterizzata da una pressione (P_{PT}) ed una temperatura (T_{PT}) preveda la coesistenza della fase solida, liquida e gassosa (vapore): la sua rappresentazione viene chiamata **linea del punto triplo**. Il punto critico viene raggiunto ad una temperatura pari a 374,14°C ed una pressione pari a 22,1 MPa. Ciò significa che per avere un comportamento ideale del gas la temperatura ridotta (T_r) dovrà essere maggiore o uguale a 748,28°C: la conseguenza di quanto appena affermato è che il vapore d'acqua non è ideale in quanto difficilmente si raggiungono tali temperature operando con l'acqua. La pressione in corrispondenza del punto critico, invece, è pari a 22,1 MPa: quindi la pressione ridotta (P_r) dovrà essere pari a 0,2 atm, ovvero una condizione raggiungibile. Per il punto triplo valgono le considerazioni opposte: è caratterizzato da una temperatura pari a 0,01°C, ottenibile facilmente, e da una pressione di 610 Pa difficile da raggiungere se non attraverso sistemi a vuoto.

N.B. Al di sotto della linea del punto triplo, e quindi per pressioni inferiori a P_{PT} , non vi è presenza di liquido.

Nel grafico riportato a destra si notano le fasi dell'acqua al variare della pressione e della temperatura. È possibile notare alcune caratteristiche del diagramma in esame.

- La presenza di un punto critico, oltre il quale non vi è una netta differenza di fase (liquido, solido, vapore);
- La presenza di un punto triplo, in cui coesistono le tre fasi;
- Un incremento negativo della temperatura all'aumentare della pressione: ciò si verifica in quanto il volume specifico dell'acqua allo stato solido è maggiore rispetto al volume specifico dell'acqua allo stato liquido.



Regola della leva

Si consideri una trasformazione subcritica, ovvero una trasformazione in cui è possibile distinguere nettamente il liquido dal vapore. È logico dedurre, quindi, che la massa totale della sostanza in esame sia pari alla somma della stessa nelle due differenti forme (stato solido e vapore). Ovviamente il ragionamento analogo può essere applicato anche per l'energia interna totale.

$$m_{tot} = m_l + m_v \quad U_{tot} = U_l + U_v = m_l \cdot u_l + m_v \cdot u_v$$

In questa trattazione è utile definire il rapporto tra massa di vapore e massa totale come "titolo di vapore". Di conseguenza è possibile definire anche la "frazione di liquido" come segue.

$$X = \frac{m_v}{m_{tot}} \quad 1 - X = \frac{m_l}{m_{tot}}$$

Dividendo i membri dell'equazione relativa all'energia interna totale si ha:

$$\frac{U_{tot}}{m_{tot}} = \frac{m_l \cdot u_l}{m_{tot}} + \frac{m_v \cdot u_v}{m_{tot}} \rightarrow u_{tot} = X \cdot u_v + (1 - X) \cdot u_l$$

In maniera del tutto analoga si può effettuare il medesimo ragionamento con tutte le grandezze specifiche alla massa: la deduzione che si ricava è che le grandezze estensive specifiche alla massa dipendono dal titolo di vapore.

$u_{tot} = X \cdot u_v + (1 - X) \cdot u_l$	$s_{tot} = X \cdot s_v + (1 - X) \cdot s_l$
$h_{tot} = X \cdot h_v + (1 - X) \cdot h_l$	$v_{tot} = X \cdot v_v + (1 - X) \cdot v_l$

Ovviamente queste considerazioni valgono per trasformazioni subcritiche, ma soprattutto in determinate condizioni che sono localizzate all'interno della campana del grafico in esame. Al fine di poter applicare la regola della leva è necessario che siano noti i valori estremi delle grandezze relative alle trasformazioni in esame. Per trasformazioni all'esterno della campana le grandezze specifiche u , h ed s vengono valutate tramite tabelle e diagrammi: in particolare, ad una data coppia di pressione e temperatura, viene associato un valore di energia interna specifica, entropia specifica ed entalpia specifica.

Esempio – Sistema in equilibrio

Si consideri un sistema cilindro-pistone, dove al suo interno si hanno liquido e vapore in equilibrio ad una determinata temperatura e pressione. Si immagini di effettuare una trasformazione TIR tale per cui si abbia una evaporazione con conseguente variazione del volume: perché ciò avvenga è necessario introdurre del calore. Nella rappresentazione grafica, infatti, viene rappresentata una quantità di calore in ingresso e del lavoro uscente.

Nota l'equazione generica relativa all'energia interna in funzione di temperatura, entropia, pressione e volume la si adatti ad una sostanza bifasica.

$$dU = TdS - PdV \rightarrow d(U_v + U_l) = Td(S_v + S_l) - Pd(V_v + V_l)$$

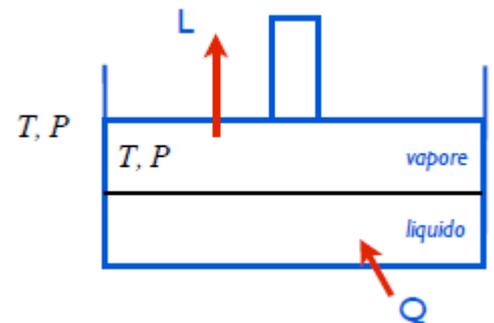
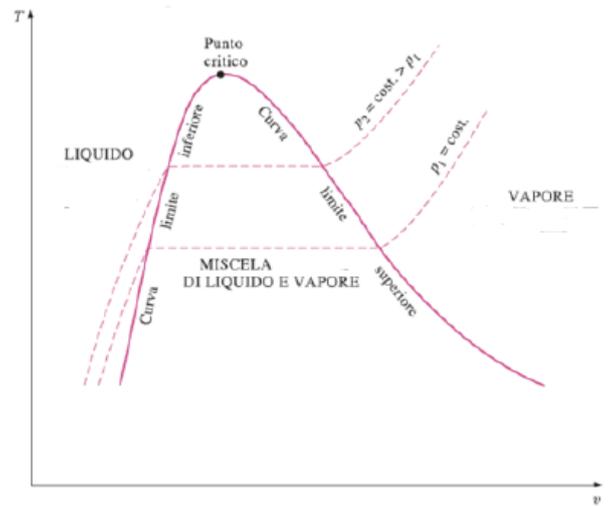
$$d(M_v U_v + M_l U_l) = Td(M_v S_v + M_l S_l) - Pd(M_v V_v + M_l V_l)$$

$$\text{Le grandezze specifiche di liquido e vapore sono costanti} \rightarrow dM_v \cdot (u_v - Ts_v + Pv_v) = -dM_l \cdot (u_l - Ts_l + Pv_l)$$

$$\text{Energia libera di Gibbs} \rightarrow dG = dH - d(TS) \rightarrow dG = dU + d(PV) - d(TS) \rightarrow \text{con } T \text{ e } P \text{ costanti si ha: } dG = dU + Pd(V) - Td(S)$$

$$\begin{cases} dM_v \cdot (u_v - Ts_v + Pv_v) = -dM_l \cdot (u_l - Ts_l + Pv_l) \\ dG = dU + Pd(V) - Td(S) \end{cases} \rightarrow dM_v \cdot (g_v) = -dM_l \cdot (g_l)$$

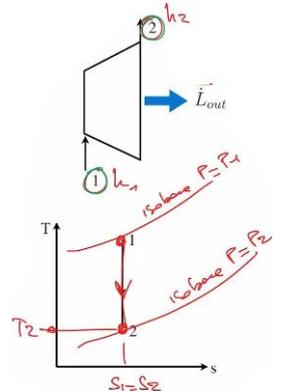
Tuttavia il cilindro-pistone è un sistema chiuso e quindi si ha un bilancio di massa, in particolare: $dM_v = -dM_l$. Ne consegue $g_v = g_l$, ovvero che all'equilibrio, indipendentemente dalla sostanza in esame, l'energia di Gibbs rimane costante.



Lezione dell'11 ottobre 2021

Turbina ideale – TIR isoentropica Gas Ideale

La turbina è uno strumento il cui scopo è quello di ottenere potenza meccanica a partire da un fluido energeticamente ricco. Si consideri una turbina ideale, ovvero caratterizzata da una TIR isoentropica di un gas ideale. È noto che una TIR isoentropica è anche adiabatica, dunque questi strumenti vengono costruiti in modo che essi siano isolati. La condizione imposta sul gas, ovvero che esso sia ideale, non è necessaria: infatti vi sono cicli che processano il vapore d'acqua, il quale non si comporta sempre in modo ideale. La turbina, generalmente, viene indicata con la rappresentazione grafica riportata a lato: in questo caso vi è del fluido allo stato "1" in ingresso in un sistema aperto caratterizzato da un aumento di sezione. Ciò è dovuto all'aumento del volume specifico in seguito alla TIR che coinvolge il gas ideale. Lo stesso, però, non avviene per la portata massica che rimane costante nel tempo in condizioni stazionarie. Al termine della trasformazione il fluido esce dal sistema allo stato "2" e con lavoro \dot{L}_{out} .



Bilancio Energetico $\rightarrow \dot{m}_1 \cdot h_1 = \dot{L}_{out} + \dot{m}_2 \cdot h_2 \rightarrow \dot{m} \cdot h_1 = \dot{L}_{out} + \dot{m} \cdot h_2$ Per una TIR $\rightarrow \dot{L}_{out} = -\dot{m} \int v \cdot dP$

Il modo più facile per calcolare \dot{L}_{out} è partire dal bilancio energetico $\rightarrow \dot{L}_{out} = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2)$

\dot{L}_{out} (Gas Ideale) = $\dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_2)$

Tipicamente è nota la temperatura allo stato n°1, in quanto viene introdotto un gas ideale avente determinate caratteristiche. La temperatura allo stato n°2 invece non è nota: l'alternativa alla misurazione della stessa è effettuare una stima. Ciò può essere ottenuta in quanto si sta analizzando una TIR isoentropica in cui è coinvolto un gas ideale, ovvero una politropica.

$\dot{Q}_{in} = \int C_x dT \rightarrow$ con $\dot{Q}_{in} = 0$ e $dT \neq 0 \rightarrow C_x = 0$ $n =$ *Indice di politropica* $= \frac{C_x - C_p}{C_x - C_v} \rightarrow n = \frac{C_p}{C_v}$

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \rightarrow$ *Noti T_1 e P_1 , ed imposta una P_2 in uscita si ottiene T_2*

Il bilancio entropico, in questo caso, è molto semplice poiché non vi è calore scambiato e nemmeno irreversibilità, in quanto TIR.

Bilancio Entropico $\rightarrow \dot{m} \cdot s_1 = \dot{m} \cdot s_2$

Turbina – TIR non adiabatica Gas Ideale

La turbina in questione non è perfettamente isolata e quindi la trasformazione al suo interno, pur essendo TIR, non è adiabatica. Generalmente il la potenza termica è uscente dalla turbina e quindi ha valore negativo ($\dot{Q}_{out} > 0$).

Bilancio Energetico $\rightarrow \dot{m}_1 \cdot h_1 = \dot{L}_{out} + \dot{Q}_{out} + \dot{m}_2 \cdot h_2 \rightarrow \dot{m} \cdot h_1 = \dot{L}_{out} + \dot{Q}_{out} + \dot{m} \cdot h_2$

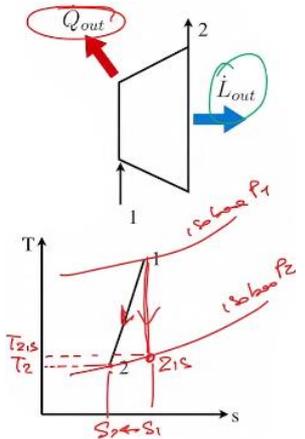
Dove $\dot{Q}_{out} = -\dot{m} \cdot \int C_x \cdot dT = \dot{m} \cdot C_x \cdot (T_1 - T_2)$

Il calore in uscita genera una diminuzione della temperatura allo stato n°2, come anche la produzione di lavoro in uscita in virtù di quanto osservato nel caso di una turbina ideale con gas ideale.

Con $\dot{Q}_{out} > 0 \rightarrow C_x > 0$

$\dot{L}_{out} = \dot{m} \cdot h_1 - \dot{m} \cdot h_2 - \dot{Q}_{out} \rightarrow \dot{L}_{out} = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2) - \dot{Q}_{out} \rightarrow \dot{L}_{out}(\text{Gas Ideale}) = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_2) - \dot{m} \cdot C_x \cdot (T_1 - T_2)$

\dot{L}_{out} (Gas Ideale) = $\dot{m} \cdot (C_p - C_x) \cdot (T_1 - T_2)$



Nel sistema in esame, a differenza del precedente, non vi è solo una variazione negativa di temperatura ma anche una diminuzione dell'entropia. Ciò lo si deduce sia dal grafico della temperatura in funzione dell'entropia ma anche dal bilancio entropico.

Bilancio Entropico $\rightarrow \dot{m} \cdot s_1 + \dot{S}_{Q_{out}} = \dot{m} \cdot s_2 \rightarrow \dot{m}(s_2 - s_1) = \dot{S}_{Q_{out}} \rightarrow \dot{m}(s_2 - s_1) = - \int \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T} = \dot{m} \cdot \int \frac{C_x \cdot dT}{T} = \dot{m} \cdot C_x \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} < 0$

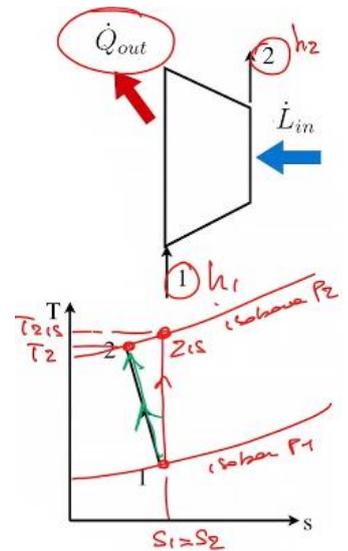
Attraverso il bilancio entropico appena riportato, si evince che ad una potenza termica uscente viene associata una variazione di entropia negativa e quindi anche una variazione di temperatura negativa. Anche in questo caso, trattandosi di una TIR relativa ad un gas ideale, è possibile trattarla come una politropica.

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ $n =$ *Indice di politropica* $= \frac{C_x - C_p}{C_x - C_v}$

$\dot{m}(s_2 - s_1) = \dot{m} \cdot C_x \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$ *In alternativa:* $\dot{m}(s_2 - s_1) = \dot{m} \cdot \left(C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{P_2}{P_1}\right)$

Compressore – TIR non adiabatica Gas Ideale

L'obiettivo del compressore è quello di aumentare la pressione di un gas sfruttando una potenza meccanica in ingresso. Il compressore, generalmente, viene indicato con la rappresentazione grafica riportata a lato: in questo caso vi è un gas allo stato "1" in ingresso in un sistema aperto caratterizzato da una diminuzione di sezione. Ciò è dovuto alla diminuzione del volume specifico in seguito alla TIR che coinvolge il gas ideale. Lo stesso, però, non avviene per la portata massica che rimane costante nel tempo in condizioni stazionarie. Al termine della trasformazione, avvenuta grazie all'impiego di lavoro meccanico entrante (\dot{L}_{in}), il gas esce dal sistema aperto allo stato "2", insieme ad una potenza termica (\dot{Q}_{out}).



$$\text{Bilancio Energetico} \rightarrow \dot{m}_1 \cdot h_1 + \dot{L}_{in} = \dot{Q}_{out} + \dot{m}_2 \cdot h_2 \rightarrow \dot{m} \cdot h_1 + \dot{L}_{in} = \dot{Q}_{out} + \dot{m} \cdot h_2$$

$$\dot{L}_{in} = \dot{Q}_{out} + \dot{m} \cdot h_2 - \dot{m} \cdot h_1 \rightarrow \dot{L}_{in} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) + \dot{Q}_{out}$$

Attraverso quest'ultima equazione si evince che, a parità di entalpia, la potenza meccanica entrante viene dissipata in forma di calore: ciò ovviamente genera un discostamento dal caso ottimale. Considerando un caso ideale, in cui $\dot{Q}_{out} = 0$ e quindi $\dot{L}_{in} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1)$, la trasformazione sarebbe una isentropica e la temperatura finale raggiunta sarebbe pari a $T_{2(Isoentropica)}$. Tuttavia, essendo presente nel caso in esame una dissipazione, vi è un discostamento dalla situazione ideale: in particolare la dissipazione di calore comporterà una diminuzione della temperatura finale e quindi $T_{2(Caso\ in\ esame)} < T_{2(Isoentropica)}$.

In sintesi → La compressione aumenta la temperatura mediante un lavoro in ingresso, mentre la dispersione termica la riduce

$$\dot{Q}_{out} = -\dot{m} \cdot \int C_x \cdot dT \rightarrow \text{La variazione di temperatura (dT) è comunque positiva, nonostante la dispersione} \rightarrow \text{Quindi } C_x < 0$$

$$\dot{L}_{in} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) + \dot{Q}_{out} \rightarrow \dot{L}_{in} = \dot{m} \cdot (C_p - C_x) \cdot (T_2 - T_1)$$

Si noti come il secondo fattore al secondo membro dell'equazione sopraportata sia pari ad un valore maggiore rispetto a C_p in quanto $C_x < 0$. Ciò comporta che il lavoro impiegato per la trasformazione è maggiore rispetto al caso ideale, senza dissipazione, in cui $C_x = 0$.

Anche in questo caso, trattandosi di una TIR relativa ad un gas ideale, è possibile trattarla come una politropica.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad n = \text{Indice di politropica} = \frac{C_x - C_p}{C_x - C_v}$$

Nel sistema in esame, a differenza del caso precedente, non vi è una variazione negativa di temperatura ma una diminuzione dell'entropia. Ciò lo si deduce sia dal grafico della temperatura in funzione dell'entropia ma anche dal bilancio entropico, noto che $C_x < 0$.

$$\text{Bilancio Entropico} \rightarrow \dot{m} \cdot s_1 + \dot{S}_{Q_{out}} = \dot{m} \cdot s_2 \rightarrow \dot{m}(s_2 - s_1) = \dot{S}_{Q_{out}} \rightarrow \dot{m}(s_2 - s_1) = - \int \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T} = \dot{m} \cdot \int \frac{C_x \cdot dT}{T} = \dot{m} \cdot C_x \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} < 0$$

Turbina reale – NON TIR adiabatica Gas Ideale

Ogni turbina reale presenta un discostamento dalla turbina ideale a causa della presenza dell'attrito. A meno di errori macroscopici è possibile ottenere turbine reali che possono essere considerate adiabatiche: quindi, solitamente, non vi è scambio di potenza termica con l'esterno.

$$\text{Bilancio Energetico} \rightarrow \dot{m}_1 \cdot h_1 = \dot{L}_{out} + \dot{m}_2 \cdot h_2 \rightarrow \dot{m} \cdot h_1 + \dot{L}_{out} = \dot{m} \cdot h_2$$

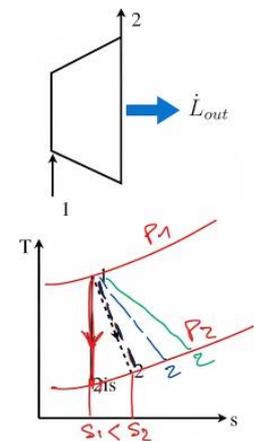
Non essendo più la trasformazione di tipo TIR non è più valida la seguente relazione: $\dot{L}_{out} \neq -\dot{m} \cdot \int v dP$. Ciò significa che il lavoro in uscita è ottenibile riformulando l'equazione del bilancio energetico.

$$\dot{L}_{out} = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2) = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_2)$$

In questo caso, però, non è possibile scrivere trattare la trasformazione in esame come una politropica in quanto non è di tipo TIR. Tuttavia è possibile studiare un caso parallelo a quello in esame, attraverso cui ottenere l'equivalente temperatura $T_{2(Isoentropica)}$.

$$\frac{T_{2(Isoentropica)}}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad n = \frac{C_p}{C_v}$$

Graficamente sono state rappresentate sia la trasformazione ideale, sia la trasformazione reale: quest'ultima è tratteggiata in quanto, in una NON-TIR, la temperatura non è sempre definita. Si noti come $T_2 > T_{2(Isoentropica)}$ e che $s_2 > s_{2(Isoentropica)}$: ciò lo si deduce dal **bilancio entropico**.



$$\dot{m} \cdot s_{2(Isoentropica)} + \dot{S}_{irr} = \dot{m} \cdot s_2 \rightarrow \dot{m} \cdot s_1 + \dot{S}_{irr} = \dot{m} \cdot s_2 \rightarrow \text{Con } \dot{S}_{irr} > 0, \text{ per definizione} \rightarrow \dot{S}_{irr} = \dot{m} \cdot (s_2 - s_1) = \dot{m} \left[\left(C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \right) - \left(R \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} \right) \right] > 0$$

L'espressione ottenuta, però, non presenta tutte le variabili necessarie a studiare il caso di una turbina reale: per questo motivo viene introdotto il **rendimento isoentropico della turbina (η_{is}^T)**. Noto il rendimento, la temperatura iniziale e la temperatura finale per la corrispondente trasformazione isoentropica è possibile ottenere la temperatura finale relativa al caso reale.

$$\eta_{is}^T = \frac{l_{out}}{l_{out}^{is}} \rightarrow \eta_{is}^T = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2(Isoentropica)}} = \frac{C_p \cdot (T_1 - T_2)}{C_p \cdot [T_1 - T_{2(Isoentropica)}]} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_{2(Isoentropica)}}$$

Turbina reale – NON TIR adiabatica Gas Ideale

Analisi politropica equivalente

Pur non trattandosi di una trasformazione TIR si utilizza il medesimo approccio riservato ad una TIR al fine di comprendere a fondo alcuni passaggi. Si immagini che la turbina si comporti in modo ideale generando una potenza ideale (\dot{L}_{id}): una parte di essa verrà trasformata in attrito, rientrando nella macchina come potenza termica (\dot{Q}_{att}).

$$\dot{L}_{id} = \dot{Q}_{att} + \dot{L}_{out} \rightarrow \dot{L}_{out} = \dot{L}_{id} - \dot{Q}_{att}$$

$$\text{Bilancio Energetico} \rightarrow \dot{m}_1 \cdot h_1 = \dot{L}_{out} + \dot{m}_2 \cdot h_2 \rightarrow \dot{m} \cdot h_1 + \dot{L}_{out} = \dot{m} \cdot h_2$$

Non essendo più la trasformazione di tipo TIR non è più valida la seguente relazione: $\dot{L}_{out} \neq -\dot{m} \cdot \int v dP$. Ciò significa che il lavoro in uscita è ottenibile riformulando l'equazione del bilancio energetico.

$$\dot{L}_{out} = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2) \rightarrow \dot{L}_{out} \text{ (Gas Ideale)} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_2)$$

$$\text{Trasformazione isoentropica da 1 a 2} \rightarrow \dot{L}_{id} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_{2,is})$$

$$\text{Trasformazione isobara da } 2_{is} \text{ a 2} \rightarrow \dot{Q}_{att}^{in} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_2 - T_{2,is}) = \dot{m} \cdot C_x \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\begin{cases} \dot{L}_{out} = \dot{L}_{id} - \dot{Q}_{att}^{in} \\ \dot{L}_{id} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_{2,is}) \rightarrow \dot{L}_{out} = [\dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_{2,is})] - [\dot{m} \cdot C_p \cdot (T_2 - T_{2,is})] \rightarrow \dot{L}_{out} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_2) = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2) \\ \dot{Q}_{att}^{in} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_2 - T_{2,is}) \end{cases}$$

L'identità appena riportata conferma che la trasformazione NON-TIR adiabatica da 1 a 2 del gas ideale in questione equivale all'unione della trasformazione isoentropica da 1 a 2. L'irreversibilità, quindi, può essere vista come una conversione di lavoro in calore ed una iniezione di quest'ultimo all'interno del sistema.

$$\text{Bilancio entropico} \rightarrow \dot{m} \cdot s_1 + \dot{S}_{Q_{in}} = \dot{m} \cdot s_2, \text{ dove } \dot{S}_{Q_{in}} \text{ è associato al calore entrante generato dall'attrito}$$

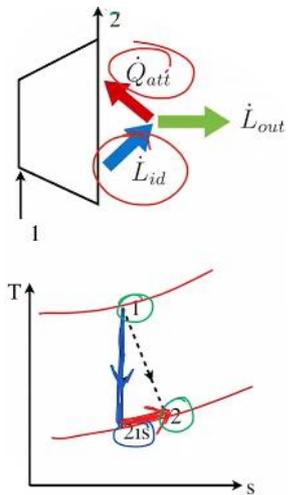
Nell'equazione relativa al bilancio entropico **non compare nessun termine relativo all'irreversibilità**, in quanto tutte le trasformazioni considerate sono TIR. Il termine entropico relativo al calore in ingresso generato dall'attrito ($\dot{S}_{Q_{in}}$) è positivo ed è l'equivalente dell'irreversibilità (\dot{S}_{irr}): l'attrito, infatti, è l'origine dell'irreversibilità.

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (s_2 - s_{2,is}) + (s_{2,is} - s_1) = s_2 - s_{2,is} \rightarrow \Delta s = s_2 - s_1 = s_2 - s_{2,is}, \text{ in quanto la trasformazione da 1 a } 2_{is} \text{ è isoentropica}$$

$$\dot{m} \cdot (s_2 - s_{2,is}) = \dot{m} \cdot C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_{2,is}} > 0, \text{ con } C_p > 0$$

$$\dot{m} \cdot (s_2 - s_1) = \dot{m} \cdot C_x \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} > 0, \text{ con } C_x < 0$$

$$\dot{m} \cdot (s_2 - s_1) = \dot{m} \cdot \left(c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} \right) \rightarrow \text{Forma generica, in questo caso poco vantaggiosa}$$



Compressore reale – NON TIR adiabatica Gas Ideale

L'unico scambio energetico previsto in queste condizioni è la potenza meccanica in ingresso (\dot{L}_{in}). Non essendo più la trasformazione di tipo TIR non è più valida la seguente relazione: $\dot{L}_{in} \neq \dot{m} \cdot \int v dP$. Quindi il lavoro in uscita è ottenibile riformulando l'equazione del bilancio energetico.

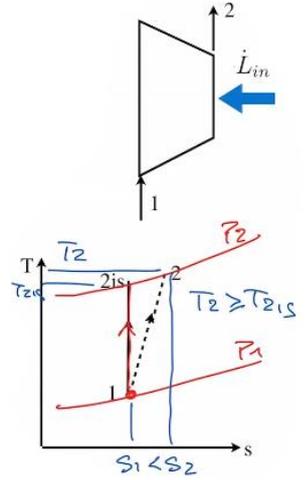
$$\text{Bilancio Energetico} \rightarrow \dot{m}_1 \cdot h_1 + \dot{L}_{in} = \dot{m}_2 \cdot h_2 \rightarrow \dot{m} \cdot h_1 + \dot{L}_{in} = \dot{m} \cdot h_2$$

$$\dot{L}_{in} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) \rightarrow \dot{L}_{out} \text{ (Gas Ideale)} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1)$$

In questo caso, però, non è possibile scrivere trattare la trasformazione in esame come una politropica in quanto non è di tipo TIR. Tuttavia è possibile studiare un caso parallelo a quello in esame, attraverso cui ottenere l'equivalente temperatura $T_{2(Isoentropica)}$.

$$\frac{T_{2(Isoentropica)}}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad n = \frac{C_p}{C_v}$$

Graficamente sono state rappresentate sia la trasformazione ideale, sia la trasformazione reale: quest'ultima è tratteggiata in quanto, in una NON-TIR, la temperatura non è sempre definita. Si noti come $T_2 > T_{2(Isoentropica)}$ e che $s_2 > s_{2(Isoentropica)}$: ciò lo si deduce dal **bilancio entropico**.



$$\dot{m} \cdot s_{2(Isoentropica)} + \dot{S}_{irr} = \dot{m} \cdot s_2 \rightarrow \dot{m} \cdot s_1 + \dot{S}_{irr} = \dot{m} \cdot s_2 \rightarrow \text{Con } \dot{S}_{irr} > 0, \text{ per definizione} \rightarrow \dot{S}_{irr} = \dot{m} \cdot (s_2 - s_1) = \dot{m} \left[\left(C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \right) - \left(R \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} \right) \right] > 0$$

L'espressione ottenuta, però, non presenta tutte le variabili necessarie a studiare il caso di un compressore reale: per questo motivo viene introdotto il **rendimento isoentropico del compressore** (η_{is}^c). Noto il rendimento, la temperatura iniziale e la temperatura finale per la corrispondente trasformazione isoentropica è possibile ottenere la temperatura finale relativa al caso reale.

$$\eta_{is}^c = \frac{l_{in}^{is}}{l_{in}^c} \rightarrow \eta_{is}^c = \frac{h_{2(Isoentropica)} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{C_p \cdot [T_{2(Isoentropica)} - T_1]}{C_p \cdot (T_2 - T_1)} = \frac{T_{2(Isoentropica)} - T_1}{T_2 - T_1}$$

N.B. Aggiungendo una dispersione termica il risultato finale potrebbe essere una variazione positiva di entropia come anche una variazione negativa o addirittura nulla (isoentropica).

$$\dot{m} \cdot s_{2(Isoentropica)} + \dot{S}_{irr} + \dot{S}_{Q_{out}} = \dot{m} \cdot s_2 \rightarrow \dot{m} \cdot s_1 + \dot{S}_{irr} + \dot{S}_{Q_{out}} = \dot{m} \cdot s_2$$

$$\dot{S}_{irr} + \dot{S}_{Q_{out}} = 0 \rightarrow \text{Caso Isoentropica}$$

Valvole di laminazione – NON TIR isoentalpica

Le valvole, in generale, equivalgono a delle strozzature sul tubo, eventualmente controllabili, che introducono l'attrito. Le valvole di laminazione sono degli strumenti adiabatici ed incapaci di scambiare lavoro: nel caso in esame la trasformazione è di tipo NON-TIR.

$$P_1 > P_2$$



$$Q = 0$$

$$L = 0$$

Bilancio energetico $\rightarrow h_1 = h_2$ (Sistema Aperto)

Bilancio entropico $\rightarrow s_2 - s_1 = s_{irr}$ (Non c'è calore scambiato)

In un gas ideale, se l'entalpia è costante anche la temperatura è costante, nonostante vi sia un calo di pressione dovuto all'attrito. L'entropia, invece, diminuisce e lo si evince anche dalla seguente equazione.

$$s_2 - s_1 = C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} = -R \cdot \ln \frac{P_2}{P_1}, \text{dove } P_2 < P_1 \text{ e quindi } s_2 - s_1 > 0$$

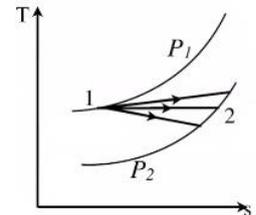
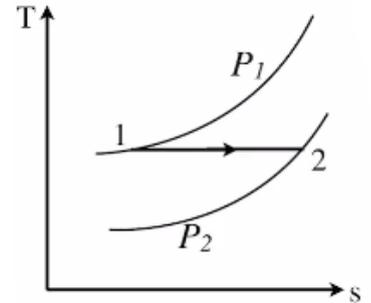
Per una sostanza generica, invece, è necessario utilizzare la definizione completa della variazione di entalpia: $dh = C_p dT - T \cdot v \cdot K_p \cdot dP + vdP$. Ponendo anche in questo caso $dh = 0$, in quanto è una trasformazione adiabatica senza lavoro scambiato, si ottiene la seguente equazione.

$$dh = 0 \rightarrow C_p dT - T \cdot v \cdot K_p \cdot dP + vdP = 0 \rightarrow dT = \frac{T \cdot v \cdot K_p \cdot dP - vdP}{C_p} = dP \cdot \frac{T \cdot v \cdot K_p - v}{C_p} \rightarrow dT = \frac{dP \cdot v}{C_p} \cdot (T \cdot K_p - 1)$$

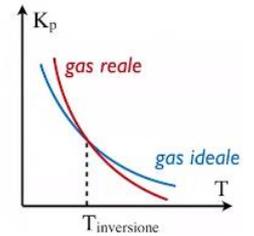
Il **coefficiente di Joule-Thomson** viene definito come la derivata della variazione di temperatura rispetto alla pressione ad entalpia costante.

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_h \rightarrow \mu_{JT} = \frac{v}{C_p} \cdot (T \cdot K_p - 1) \rightarrow \text{Indica la variazione della temperatura rispetto alla pressione}$$

Nel **caso dei gas ideali** si ha che $K_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}$: ciò significa che il coefficiente di Joule-Thomson è nullo ($\mu_{JT} = 0$) e che quindi una variazione di pressione non implica nessun aumento e/o calo della temperatura. Graficamente, il coefficiente di Joule-Thomson fornisce la pendenza della curva $T-s$ e nel caso di un gas ideale essa è una linea orizzontale.



Nel **caso dei gas reali** il coefficiente (μ_{JT}) può avere valori positivi o negativi: per comprenderne meglio il significato è utile analizzare il grafico in cui viene riportata la variazione di K_p in funzione della temperatura (T) sia per un gas ideale, sia per un gas reale generico. Vi è una prima zona dove il grafico relativo al gas reale è maggiore rispetto al gas ideale, quindi $K_p(\text{Gas Reale}) > K_p(\text{Gas Ideale}) \rightarrow K_p(\text{Gas Reale}) > \frac{1}{T}$. In virtù della definizione del coefficiente di Joule-Thomson si può dedurre che per $K_p(\text{Gas Reale}) > \frac{1}{T}$ si ha che $\mu_{JT} > 0$. Ragionamento analogo vale per la seconda zona dove il grafico relativo al gas reale è minore rispetto al gas ideale: $K_p(\text{Gas Reale}) < K_p(\text{Gas Ideale}) \rightarrow K_p(\text{Gas Reale}) < \frac{1}{T}$.



Se $\mu_{JT} > 0 \rightarrow$ Ad una variazione negativa di pressione corrisponde una variazione negativa della temperatura \rightarrow **Raffreddamento**

Se $\mu_{JT} < 0 \rightarrow$ Ad una variazione negativa di pressione corrisponde una variazione positiva della temperatura \rightarrow **Riscaldamento**

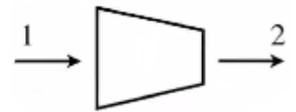
Se $\mu_{JT} = 0 \rightarrow$ Ad una variazione negativa di pressione corrisponde una variazione nulla della temperatura \rightarrow **Temperatura costante**

N.B. Ovviamente questi comportamenti si verificano, rispettivamente, a temperature sufficientemente basse, temperature sufficientemente alte e temperature prossime alla temperatura di inversione ($T_{inversione}$).

$T = T_{inversione}$	$K_p = \frac{1}{T}$	$\mu_{JT} = 0$	Temperatura costante
$T < T_{inversione}$	$K_p > \frac{1}{T}$	$\mu_{JT} > 0$	Raffreddamento
$T > T_{inversione}$	$K_p < \frac{1}{T}$	$\mu_{JT} < 0$	Riscaldamento

Ugelli e diffusori – TIR isentropica Gas Ideale

Gli ugelli e i diffusori sono strumenti che vengono utilizzati per convertire energia cinetica in entalpia e viceversa: anche in questo caso essi non hanno né scambi di lavoro, né scambi di calore. Rispetto alle valvole di laminazione, se progettati bene, ugelli e diffusori sono caratterizzati da TIR isentropiche e quindi senza dispersioni di attrito. Siccome attraverso questi strumenti viene convertita energia cinetica in entalpia, e viceversa, non è possibile trascurare il termine relativo all'energia cinetica nell'equazione del **bilancio energetico**.



$$s_1 = s_2$$

$$h_1 + \frac{\omega_1^2}{2} = h_2 + \frac{\omega_2^2}{2}$$

Riscrivendo il bilancio energetico in forma differenziale si ha che: $h_2 - h_1 = \frac{\omega_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2}{2} \rightarrow dh = -\omega \cdot d\omega$

$$\begin{cases} dh = -\omega \cdot d\omega \\ dh = Tds + v dP \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dh = -\omega \cdot d\omega \\ dh = v dP \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dh = -\omega \cdot d\omega \\ dh = \frac{dP}{\rho} \end{cases} \rightarrow \frac{dP}{\rho} = -\omega \cdot d\omega$$

Principio di conservazione della massa per un dispositivo a sezione variabile $\rightarrow \omega_1 \cdot \rho_1 \cdot A_1 = \omega_2 \cdot \rho_2 \cdot A_2$

$$\frac{\omega_2 \cdot \rho_2 \cdot A_2}{\omega_1 \cdot \rho_1 \cdot A_1} = 1 \rightarrow \ln\left(\frac{\omega_2 \cdot \rho_2 \cdot A_2}{\omega_1 \cdot \rho_1 \cdot A_1}\right) = \ln(1) \rightarrow \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = 0 \rightarrow \text{Derivando entrambi i membri} \rightarrow \frac{d\omega}{\omega} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{\omega} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0 \rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\omega}{\omega} - \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{dP}{\rho} = -\omega \cdot d\omega \rightarrow -\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dP}{\rho\omega^2} \end{cases} \rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho\omega^2} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{\partial\rho}{\partial P}\right) \rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \quad c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \rightarrow c = \text{velocità del suono}$$

Il **numero di Mach (M)** è definito come il rapporto tra la velocità (ω) e la velocità del suono (c): $M = \frac{\omega}{c}$.

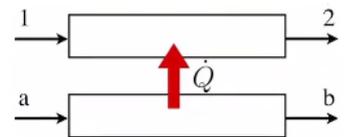
$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho\omega^2}(1 - M^2) \rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\omega}{\omega}(1 - M^2)$	$M < 1$	$dA \propto -d\omega$	Ugelli convergenti
	$M > 1$	$dA \propto +d\omega$	Ugelli divergenti

Scambiatore di calore – TIR isobara Gas/Liquido Ideale

Uno scambiatore di calore ha la funzione di scambiare calore da un fluido ad un altro attraverso trasformazioni TIR isobare. Si immagini di avere un fluido “1-2” che riceve del calore da un altro fluido “a-b”.

Lato freddo – Si riscalda	Lato caldo – Si raffredda
$\dot{m}_f(h_2 - h_1) = \dot{Q}_{in} = \dot{m}_f C_p (T_2 - T_1) \rightarrow \text{Aumento temperatura}$	$\dot{m}_c(h_a - h_b) = \dot{Q}_{out} = \dot{m}_c C_p (T_a - T_b) \rightarrow \text{Diminuzione temperatura}$
$\dot{m}_f(s_2 - s_1) = \dot{S}_{Qin} = \dot{m}_f C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} > 0 \rightarrow T_2 > T_1$ N.B. Valida sia per Gas che per Liquidi	$\dot{m}_c(s_b - s_a) = \dot{S}_{Qout} = \dot{m}_c C_p \cdot \ln \frac{T_b}{T_a} < 0 \rightarrow T_b < T_a$ N.B. Valida sia per Gas che per Liquidi

Siccome vi è uno scambio di calore tra due fluidi aventi temperature differenti è ovvio che vi siano delle irreversibilità di tipo esterne. Il valore relativo alle irreversibilità esterne sarà sempre positivo in quanto la temperatura media del fluido che scorre nel lato caldo sarà sempre maggiore rispetto alla temperatura media del fluido che scorre nel lato freddo.



$$\dot{m}_f(s_2 - s_1) + \dot{m}_c(s_b - s_a) = \dot{S}_{Qin} + \dot{S}_{Qout} = \dot{S}_{irr,est} > 0$$

Dove $\dot{S}_{Qin} > 0$ ed $\dot{S}_{Qout} < 0$

Pompa – TIR isentropica Liquido Ideale

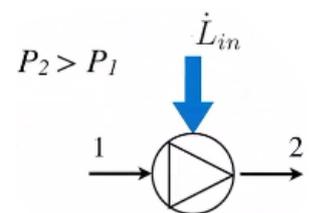
Una pompa aumenta la pressione di un liquido, attraverso una TIR isentropica e quindi adiabatica, sfruttando una potenza meccanica in ingresso. Nel caso in esame si considera un liquido ideale.

$$\text{Bilancio energetico} \rightarrow \dot{m} \cdot h_1 + \dot{L}_{in} = \dot{Q}_{out} + \dot{m} \cdot h_2 \rightarrow \text{Con } \dot{Q}_{out} = 0 \rightarrow \dot{L}_{in} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1)$$

$$\dot{L}_{in} (TIR) = \dot{m} \int v \cdot dP \rightarrow \text{Siccome } v = \text{cost.} \rightarrow \dot{L}_{in} (TIR) = \dot{m} \cdot v \cdot (P_2 - P_1)$$

$$\text{Bilancio entropico} \rightarrow \dot{m} \cdot s_1 + \dot{S}_{Qout} = \dot{m} \cdot s_2 \rightarrow \dot{m} \cdot (s_2 - s_1) = \dot{S}_{Qout}$$

$$\dot{S}_{Qout} = \dot{m} \cdot (s_2 - s_1) = \dot{m} \cdot C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \text{Siccome } \dot{S}_{Qout} = 0 \text{ si ha che } \dot{m} \cdot (s_2 - s_1) = 0 \rightarrow T_2 = T_1$$



La potenza meccanica in ingresso può essere espressa come segue in quanto la trasformazione è anche isoterma:

$$\dot{L}_{in} (TIR) = \dot{m} \cdot v \cdot (P_2 - P_1), \text{dove } v = \text{cost.}$$

N.B. Si potrebbe introdurre un rendimento specifico anche per le pompe, ma i loro consumi sono così ridotti che possono essere “omessi” dal bilancio energetico.

Lezione del 14 ottobre 2021

Miscele di gas ideali

La legge di Dalton afferma che, andando ad identificare un certo sistema con volume totale, pressione totale e temperatura noti, il numero totale di moli di una miscela di gas è pari alla somma del numero di moli di ogni specie di gas presente.

$$\text{Equazione di stato dei gas ideali applicata a miscele di gas ideali} \rightarrow P_{tot}V_{tot} = n_{tot}RT$$

$$\text{Equazione di stato dei gas ideali applicata ad una singola specie di una miscela} \rightarrow P_iV_{tot} = n_iRT$$

Si noti come il volume di una singola specie della miscela di gas ideale coincida con il volume totale della miscela, in quanto uniformemente distribuito nel sistema in analisi essendo in una situazione di equilibrio.

$$\frac{P_{tot}}{n_{tot}} = \frac{RT}{V_{tot}} \qquad \frac{P_i}{n_i} = \frac{RT}{V_{tot}}$$

$$\frac{P_{tot}}{n_{tot}} = \frac{P_i}{n_i} \rightarrow \frac{P_{tot}}{n_{tot}} = \sum \frac{P_i}{n_i} \rightarrow \frac{P_{tot}}{n_{tot}} = \frac{\sum P_i}{\sum n_i} \rightarrow \frac{P_{tot}}{n_{tot}} = \frac{\sum P_i}{n_{tot}} \rightarrow P_{tot} = \sum P_i, \text{ dove } P_i = \text{Pressione parziale del gas}$$

$$\text{Le pressioni parziali sono proporzionali al numero di moli} \rightarrow \chi_i = \text{Frazione molare} = \frac{n_i}{n_{tot}} = \frac{P_i}{P_{tot}}$$

Attraverso la regola delle fasi di Gibbs si evince che il sistema in esame è un monofasico con “N” componenti, il cui numero di variabili indipendenti ($VI = n^\circ \text{componenti} + 2 - n^\circ \text{fasi} = N + 2 - 1 = N + 1$) è pari ad $N + 1$, ed il numero di variabili estensive ($VE = N^\circ \text{fasi} = 1$) è pari ad uno. Nello specifico, le grandezze intensive sono le (n) pressioni parziali della miscela di gas ideale e la temperatura (T) del sistema, mentre la grandezza estensiva è rappresentata dal volume (V_{tot}) del sistema.

Siccome la miscela di gas ha un comportamento ideale, si ha che: $\Delta H_{tot} = m_{tot} \cdot C_{p,tot} \cdot \Delta T$. In maniera analoga è possibile calcolare la variazione di entalpia (ΔH) di ogni singolo componente della miscela: $\Delta H_i = m_i \cdot C_{p,i} \cdot \Delta T$. Essendo l'entalpia una grandezza estensiva additiva si ha che:

$$\Delta H_{tot} = \sum \Delta H_i \rightarrow m_{tot} \cdot C_{p,tot} \cdot \Delta T = \sum m_i \cdot C_{p,i} \cdot \Delta T \rightarrow m_{tot} \cdot C_{p,tot} = \sum m_i \cdot C_{p,i} \rightarrow C_{p,tot} (\text{Massico}) = \frac{\sum m_i \cdot C_{p,i}}{m_{tot}}$$

Ragionamento analogo vale anche per l'energia interna (U), quindi per $C_{v,tot}$, ed anche per la costante universale dei gas (R).

$$C_{v,tot} (\text{Massico}) = \frac{\sum m_i \cdot C_{v,i}}{m_{tot}}$$

$$\text{Dalla relazione di Mayer: } C_{p,tot} - C_{v,tot} = R_{tot}$$

$$R_{m,tot} = \sum \frac{m_i \cdot R_{m,i}}{m_{tot}}$$

Entropia di miscelamento

Si consideri un sistema con un volume totale noto costante operante in condizioni di pressione e temperatura costante. Allo stato iniziale i due gas introdotti all'interno del sistema sono separati da una parete mobile e la loro pressione è pari alla pressione totale del sistema, mentre i relativi volumi, sempre all'istante “zero”, saranno pari alla metà del volume totale del sistema. Rimuovendo la parete che separa i due gas, inizia la miscelazione e, dopo una determinata quantità di tempo, si raggiunge l'equilibrio e quindi una composizione chimica omogenea. Trattandosi di un sistema isolato è ovvio che la rimozione della parete comporterà un aumento di entropia.

$$\Delta S_i = m_i \cdot C_{p,i} \cdot \ln \frac{T_1}{T_0} - m_i \cdot R_{m,i} \cdot \ln \frac{P_{1,i}}{P_{0,tot}} \rightarrow \text{Con } T_1 = T_2 \rightarrow \Delta S_i = -m_i \cdot R_{m,i} \cdot \ln \frac{P_{1,i}}{P_{0,tot}} \rightarrow \Delta S_i = m_i \cdot R_{m,i} \cdot \ln \frac{P_{0,tot}}{P_{1,i}}$$

Rimuovendo la parete i due gas si miscelano reciprocamente, ma soprattutto, se considerati singolarmente il volume a loro disposizione aumenta: ciò significa che le pressioni parziali finali sono sicuramente maggiori di quelle iniziali, che coincidono con la pressione totale iniziale.

$$\text{Dunque si ha che } P_{0,tot} > P_{1,i} \rightarrow \text{Quindi } \Delta S_i > 0$$

Non essendoci però alcun scambio di calore, si ha che la variazione di entropia è associata ad una irreversibilità (S_{irr}) associata al miscelamento. In termini ingegneristici è molto importante calcolare l'irreversibilità relativa al miscelamento, soprattutto nei casi in cui vi sono diverse fonti di irreversibilità, come ad esempio gli scambi termici.

Aria umida

L'aria umida può essere considerata come un sistema monofase costituito da due componenti, ovvero l'aria, che nell'ambiente ha una composizione costante, e l'acqua, che per valori inferiori a 20000 Pa si comporta come un gas ideale (secondo il diagramma di Mollier). Se la condizione appena riportata è valida, allora è possibile trattare l'aria umida come una miscela di gas ideali.

VI (Aria umida) = Componenti + 2 - N°Fasi = 2 + 2 - 1 = 3 → Grandezze Intensive: **Pressione Totale, Temperatura di bulbo secco, Umidità relativa**

L'**umidità relativa** (φ) equivale al rapporto tra la pressione del vapore d'acqua misurata (P_v) e la pressione di saturazione (P_{sat}), ovvero la pressione a cui avviene la transizione di fase alla temperatura di bulbo secco.

N.B. La pressione del vapore d'acqua non può essere maggiore rispetto alla pressione di saturazione: $\varphi = \frac{P_v}{P_{sat}} \leq 100\%$.

$$\text{Se } \varphi = 100\% \rightarrow P_v = P_{sat}(T) \rightarrow \frac{n_{H_2O}}{n_{tot}} = \frac{P_v}{P_{tot}} \quad \text{Aumentando la temperatura} \rightarrow \text{Aumenta } P_{sat}(T) \text{ e quindi } P_v$$

Siccome la P_{tot} rimane costante si ha che $\frac{n_{H_2O}}{n_{tot}}$ aumenta → **All'aumentare della temperatura aumenta la quantità di H₂O nella miscela**

Per temperature molto basse la quantità di H₂O è trascurabile

L'umidità relativa indica la "distanza" dalla massima pressione parziale e quindi dal massimo contenuto di acqua: superando tale pressione si avrebbe una temperatura troppo elevata e ciò causerebbe la condensazione.

L'**umidità assoluta** (x) equivale al rapporto tra la massa di vapore e la massa di aria ed è misurata in $\frac{g_{H_2O}}{kg_{ARIA}}$.

$$m_{tot} = m_a + m_v = (1 + x) \cdot m_a$$

$$x = \frac{M_v}{M_a} \cdot \frac{n_v}{n_a} \rightarrow \text{Il vapore d'acqua si comporta come un gas ideale} \rightarrow \frac{n_v}{n_a} = \frac{P_v}{P_a} \rightarrow x = \frac{M_v}{M_a} \cdot \frac{P_v}{P_a} = 0,622 \cdot \frac{P_v}{P_{tot} - P_v} \rightarrow x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot P_{sat}(T_s)}{P_{tot} - \varphi \cdot P_{sat}(T_s)}$$

N.B. L'umidità assoluta non può essere maggiore rispetto all'umidità assoluta di saturazione: $x = \frac{m_v}{m_a} \leq x_{saturazione}$.

Entalpia

È molto importante conoscere il contenuto di acqua poiché, in un sistema aperto, l'entalpia relativa all'acqua non è trascurabile. L'entalpia totale del vapore d'acqua sarà data dalla somma dell'entalpia del vapore e dell'entalpia dell'acqua.

$$H_{tot} = H_a + H_v = m_a h_a + m_v h_v \rightarrow \text{Rispetto ad 1 kg di aria secca} \rightarrow \hat{h}_{tot} = h_a + \left(\frac{m_v}{m_a}\right) \cdot h_v = h_a + x \cdot h_v, \text{dove } h_a \text{ ed } h_v \text{ dipendono da } T$$

Misurata l'umidità relativa è possibile ottenere anche l'umidità assoluta e nota anche la temperatura è possibile calcolare l'entalpia.

N.B. Non si tratta di un "dh", bensì di un valore finito di entalpia. Per poterlo calcolare è necessario definire un riferimento: $T_{ref} = 0^\circ\text{C}$ con acqua liquida, ovvero l'estremo inferiore sinistro del diagramma di Mollier.

$$h_a = h_{a,fin} - h_{a,in} = C_{p,a} \cdot T - C_{p,a} \cdot T_{ref} = C_{p,a} \cdot (T - T_{ref})$$

$$\text{Con } T_{ref} = 0^\circ\text{C} \rightarrow h_a(T_{ref}) = 0 \rightarrow h_a = C_{p,a} \cdot T$$

$$h_v = h_{T_{transizioneDiFase}(0^\circ\text{C})} + (h_{v,fin} - h_{v,in})$$

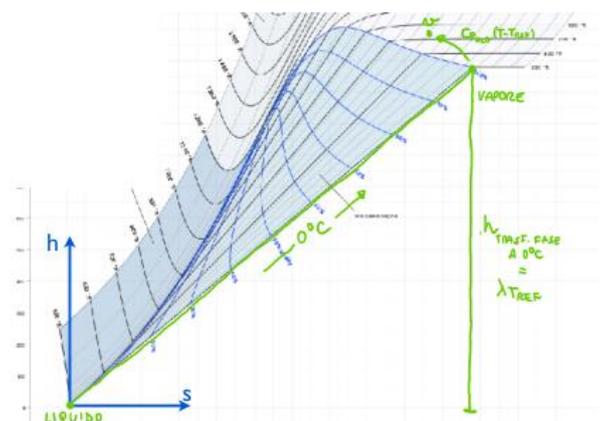
$$h_v = x \cdot [\lambda_{T_{ref}} + (C_{p,H_2O} \cdot T - C_{p,H_2O} \cdot T_{ref})] = x \cdot [\lambda_{T_{ref}} + C_{p,H_2O} \cdot (T - T_{ref})]$$

$$\text{Con } T_{ref} = 0 \rightarrow h_v = x \cdot (\lambda_{T_{ref}} + C_{p,H_2O} \cdot T)$$

$$\hat{h}_{tot} = h_a + h_v = C_{p,a} \cdot T + x \cdot (\lambda_{T_{ref}} + C_{p,H_2O} \cdot T)$$

$$\hat{h}_{tot} = T + x(2500 + 2T)$$

$$\text{Temperatura} = [^\circ\text{C}], x = \left[\frac{Kg_{H_2O}}{Kg_{Aria}}\right], \lambda = \left[\frac{KJ}{Kg}\right], C = \left[\frac{KJ}{Kg \cdot K}\right]$$



N.B. È fondamentale lavorare a temperature inferiori a 50°C perché, oltre tale valore, il comportamento del vapore non è più ideale. In questo caso, non sarebbe possibile esprimere l'entalpia come il prodotto tra $C_p \cdot \Delta T$.

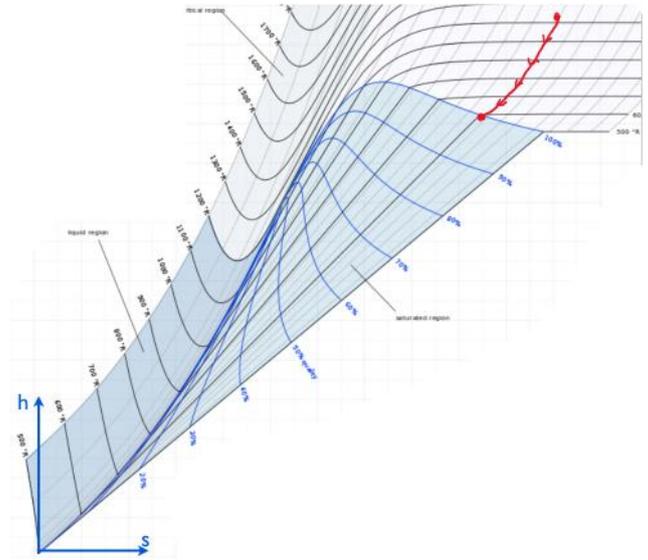
Temperatura di rugiada

Data una certa quantità di aria umida, in determinate condizioni, si esegue un raffreddamento isobaro ad "x" costante, ovvero senza introdurre acqua nel sistema, fino a saturazione. Ciò che varia è la temperatura di saturazione, pertanto anche la pressione di saturazione diminuisce.

x e P_{tot} sono costanti e la pressione di saturazione diminuisce

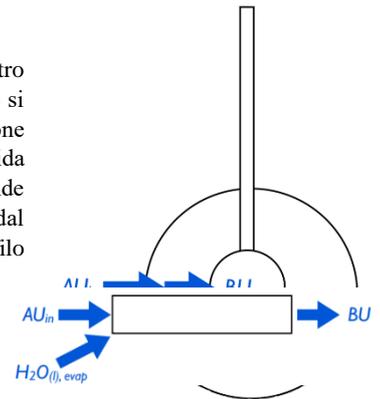
$$x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot P_{sat}(T_s)}{P_{tot} - \varphi \cdot P_{sat}(T_s)} \rightarrow \text{Aumenta l'umidità assoluta}$$

La **temperatura di rugiada** (T_r) è la temperatura alla quale si ottiene la saturazione, ovvero quando l'umidità relativa è pari al 100%. Quindi, nota la temperatura di rugiada, è possibile calcolare la relativa pressione di saturazione e quindi l'umidità assoluta imponendo l'umidità relativa pari al 100%. In sintesi, la temperatura di rugiada è la temperatura alla quale l'aria umida nel sistema risulta satura a seguito di un raffreddamento a pressione costante e senza aggiunta di acqua.



Temperatura di bulbo umido

Quando non erano disponibili i sensori di umidità relativa si utilizzava il bulbo umido, ovvero un termometro al cui intorno veniva applicato del cotone idrofilo bagnato con dell'acqua. Il principio di funzionamento si basava sulla misurazione di due temperature: la prima "a bulbo secco" ovvero senza applicare il cotone idrofilo bagnato, la seconda "a bulbo umido". I due valori ottenuti, ovviamente, erano diversi. L'aria umida entra all'interno del cotone idrofilo bagnato "umidificandosi" ulteriormente, in quanto l'acqua tende gradualmente ad evaporare fino alla saturazione. Il processo di evaporazione utilizza l'energia fornita dal sistema stesso, quindi con l'avanzare della trasformazione l'aria si raffredderà. Si consideri il cotone idrofilo bagnato come una successione di sistemi adiabatici infinitesimi disposti in direzione radiale rispetto al bulbo del termometro: all'estremità esterna vi è l'aria umida in ingresso, mentre all'estremità interna il bulbo umido, con umidità relativa al 100%.



$$H_{BU} = H_{AU,in} + H_{H_2O(l),evap} \rightarrow \text{Siccome } H_{H_2O(l),evap} \text{ è trascurabile} \rightarrow H_{BU} = H_{AU,in}$$

Entalpia aria umida in ingresso = Entalpia aria umida, ormai satura, in prossimità del bulbo

Cambia la temperatura

L'ingresso di aria umida nel sistema comporta un "ingresso" di acqua, generata a seguito dell'evaporazione, nel sistema. Tuttavia il suo contributo entalpico è trascurabile rispetto a quello dell'aria umida.

$$\hat{h}_{tot} = h_a + h_v = C_{p,a} \cdot T + x \cdot (\lambda_{T_{ref}} + C_{p,H_2O} \cdot T) \rightarrow C_{p,H_2O} \cdot T \text{ per l'acqua, che poi evaporerà, è trascurabile rispetto a } \lambda_{T_{ref}}$$

N.B. Quindi è possibile considerare la trasformazione in esame come una isoentalpica.

Attraverso la misurazione con il bulbo umido si ottiene la temperatura T_u mentre con il bulbo secco si ottiene la temperatura T_s . Nota la pressione totale P_{tot} è possibile ottenere l'umidità assoluta e l'umidità relativa.

$$\begin{cases} \hat{h}_{BS} = 1 \cdot T_s + x_{BS} \cdot (\lambda + 2 \cdot T_s) \\ \hat{h}_{BU} = 1 \cdot T_u + x_{BU} \cdot (\lambda + 2 \cdot T_u) \\ \hat{h}_{BS} = \hat{h}_{BU} \end{cases}$$

$$x_{BU} = 0,622 \cdot \frac{\varphi_{BU} P_{sat}(T_u)}{P_{tot} - \varphi_{BU} P_{sat}(T_u)}, \text{ dove } \varphi_{BU} = 100\%$$

Ottenuta x_{BU} ottengo $\hat{h}_{BU} \rightarrow \hat{h}_{BU} = \hat{h}_{BS} \rightarrow$ Ottenuto \hat{h}_{BS} è possibile ottenere x_{BS} e successivamente φ_{BS}

Diagramma psicrometrico

Lungo l'asse delle ascisse vengono riportati i valori di temperatura, mentre lungo l'asse delle ordinate i valori di umidità assoluta. Questo diagramma vale per una pressione costante, pari ad 1 atm. Viene riportata, sulla sinistra, la curva di saturazione per $\phi = 100\%$. Noti i valori di temperatura di bulbo secco e di umidità relativa è possibile ricavare il valore di umidità assoluta. Graficamente si evince anche quanto riportato in precedenza: l'entalpia è proporzionale alla temperatura e all'umidità assoluta.

Nota temperatura di bulbo secco (T_S) e umidità relativa (ϕ)

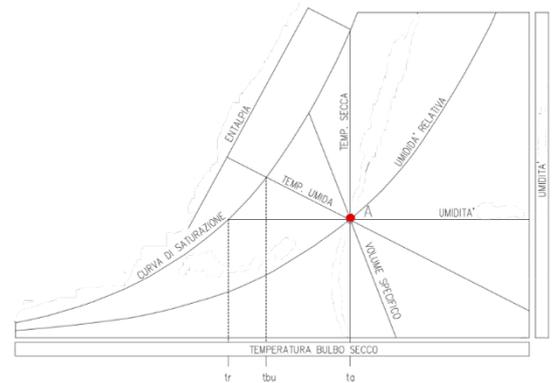
Si ottiene il Punto A → Successivamente si ottiene l'entalpia (H) e l'umidità assoluta (x)

Nota temperatura di bulbo secco (T_S) e temperatura di rugiada (T_R)

In tal caso $\phi = 100\% \rightarrow$ Si ottiene l'entalpia (H) e l'umidità assoluta (x)

Nota temperatura di bulbo secco (T_S) e temperatura di bulbo umido (T_U)

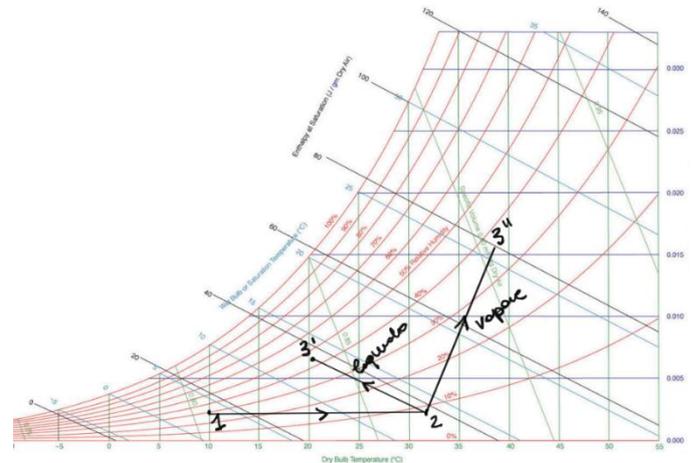
Isoentalpica → Si ottiene umidità assoluta (x) ed umidità relativa (ϕ)



Trasformazioni tipiche dell'aria umida – Riscaldamento con umidificazione

Si consideri un punto del diagramma, tale per cui i suoi valori corrispondono alle condizioni dell'aria di inverno, ovvero a 0°C con l'80% di umidità relativa. Una quantità d'aria avente queste caratteristiche viene riscaldata fino alla temperatura di 20°C : tracciando una linea orizzontale si ottiene che l'umidità relativa è calata nettamente ed è pari al 20%. Logicamente queste condizioni non possono essere accettabili, ad esempio, all'interno di un edificio e quindi è necessario umidificare l'aria.

Si consideri adesso la trasformazione riportata in nero sul grafico: partendo dall'aria avente temperatura pari a 10°C ed umidità relativa pari al 30% l'obiettivo è quello di raggiungere una temperatura pari a 20°C ma con un'umidità intorno al 45%. Affinchè ciò sia possibile è necessario riscaldare l'aria fino ad una temperatura di circa $17,5^\circ\text{C}$, dopodichè viene iniettato del vapore attraverso un opportuno generatore. In tal caso il vapore è in grado sia di aumentare la temperatura, sia l'umidità relativa.



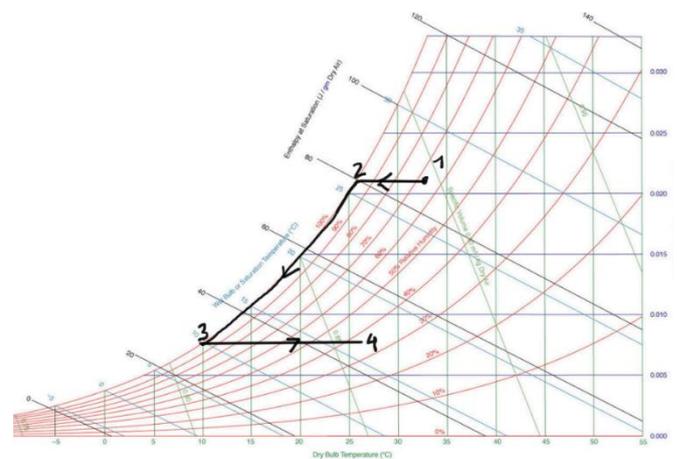
Tuttavia non sempre è facile ottenere questo risultato, infatti alcune volte viene raggiunta una temperatura di circa 32°C e un'umidità relativa pari all'8% e solo successivamente viene aggiunto del vapore raggiungendo un valore di umidità prossimo al 40% ma a temperature molto alte.

L'alternativa all'introduzione più o meno tardiva di vapore è l'iniezione di acqua liquida. Considerando il medesimo punto di partenza del caso precedente si procede con il riscaldamento dell'aria. Una volta raggiunta una temperatura di circa 32°C e un'umidità relativa pari all'8% viene iniettata dell'acqua allo stato liquido: essa evaporerà, ma come visto in precedenza, tale trasformazione è di tipo isoentalpico. Infatti il passaggio dal punto n°2 al punto n°3' avviene lungo una trasformazione isoentalpica. Il calore fornito per questa trasformazione, logicamente, è maggiore rispetto a quello fornito per una identica variazione di temperatura senza però tenere in considerazione l'umidità. Basta considerare che nella trasformazione più semplice bisogna fornire calore per passare da 10°C a 20°C , mentre nel riscaldamento con umidificazione bisogna fornire calore per passare da 10°C a 32°C e successivamente introdurre dell'acqua.

Trasformazioni tipiche dell'aria umida – Raffreddamento con deumidificazione

Si consideri il punto n°1 del diagramma, tale per cui i suoi valori corrispondono alle condizioni dell'aria d'estate, ovvero a $32,5^\circ\text{C}$ e umidità relativa pari a circa 65%. L'obiettivo è raggiungere una temperatura pari a 27°C ma essa può essere raggiunta considerando o meno il valore di umidità relativa: l'ideale è raggiungere la temperatura di 27°C con un valore di umidità relativa pari al 35% circa.

Si consideri la trasformazione riportata in nero sul grafico: partendo dall'aria avente temperatura pari a $32,5^\circ\text{C}$ e umidità relativa pari a circa 65% essa viene raffreddata, attraverso uno scambiatore di calore, fino alla temperatura di circa 26°C . La trasformazione dal punto n°1 al punto n°2 è di tipo iso-x, ovvero la quantità di acqua non sta variando. A tale temperatura si ha che l'umidità relativa è pari al 100%, quindi l'aria inizia a condensare (passaggio da vapore a liquido). Infatti, al diminuire della temperatura, l'umidità relativa rimane costante mentre l'umidità assoluta diminuisce. Raggiunto il valore di umidità assoluta desiderato, pari a 0,007, si riscalda l'aria fino a raggiungere la temperatura di 27°C richiesta: logicamente attraverso il riscaldamento diminuisce l'umidità relativa.

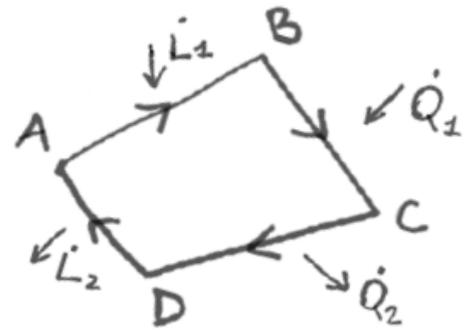


È possibile notare una importante differenza nelle due variazioni di entalpia a seconda del processo di raffreddamento utilizzato: in particolare, nel raffreddamento con deumidificazione, vi è una maggiore variazione di entalpia dovuta alla rimozione dell'acqua.

Lezione del 20 ottobre 2021

Cicli termodinamici

Si definisce come ciclo termodinamico una successione di trasformazioni tale per cui la condizione iniziale coincide con la condizione finale. Nel caso in esame vi sono due scambi di potenza meccanica e due scambi di potenza termica. Dal punto di vista energetico, poiché non vi sono scambi di massa con l'esterno e nemmeno "accumuli" di massa all'interno del sistema, il bilancio è molto semplice: la sommatoria degli scambi energetici in ingresso, in termini di potenza, è pari alla sommatoria degli scambi energetici in uscita, in termini di potenza.



$$\sum_{(in)} \dot{E} = \sum_{(out)} \dot{E}$$

Invece, dal punto di vista entropico, è necessario considerare una generazione di entropia per irreversibilità e quindi non vi è conservazione di entropia. Il bilancio entropico, anche in questo caso, è elementare.

$$\sum \dot{S}_{Q_{in}} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} + \dot{S}_{irr} = 0 \rightarrow \text{Dove } \dot{S}_{irr} = 0 \text{ per cicli senza irreversibilità}$$

$$\sum \dot{S}_{Q_{in}} + \sum \dot{S}_{Q_{out}} + \dot{S}_{irr} = 0 \rightarrow \sum \int \frac{\delta \dot{Q}_{in}}{T} + \dot{S}_{irr} = \sum \int \frac{\delta \dot{Q}_{out}}{T}$$

N.B. I cicli termodinamici vengono impiegati dalle macchine termodinamiche.

Macchina motrice

La macchina motrice viene schematizzata come riportato a lato, ovvero con un serbatoio di calore ad alta temperatura (T_c), un serbatoio di calore a temperatura (T_f) inferiore alla temperatura (T_c) ed una macchina che riceve una quantità di calore (Q_c) dal serbatoio a temperatura (T_c), rilascia una quantità di calore (Q_f) al serbatoio a temperatura (T_f) e produce un lavoro meccanico (L).

N.B. La quantità di calore (Q_f) non può essere nulla in quanto verrebbe violato l'enunciato di Kelvin del secondo principio della termodinamica.

- Rendimento**

Il rendimento è un indicatore di qualità della macchina, pertanto esso è pari al rapporto tra il risultato desiderato da una macchina ed il costo per ottenerlo. Logicamente il valore di tale rapporto è compreso tra 0 ed 1: fornendo un "costo" di energia pari a (Q_c) il miglior risultato ottenibile è pari a questa quantità, in quanto non può essere generata ulteriore energia per il principio di conservazione dell'energia.

$$\eta = \frac{L}{Q_c} \quad Q_c = L + Q_f$$

- Bilancio entropico rispetto alla macchina**

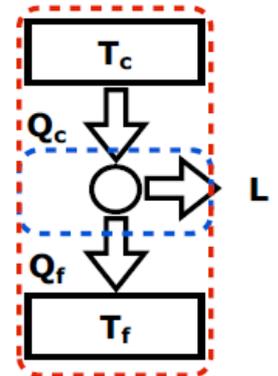
$$\Delta S_{Q_c} = \int \frac{\delta Q_c}{T} \quad \Delta S_{Q_f} = - \int \frac{\delta Q_f}{T}$$

$$\Delta S_{macchina} = \Delta S_{Q_c} + S_{irr} + \Delta S_{Q_f}$$

$\Delta S_{macchina} = 0$ in quanto la macchina esegue un numero finito di cicli termodinamici

$$\Delta S_{macchina} = 0 \rightarrow \Delta S_{Q_c} + S_{irr} + \Delta S_{Q_f} = 0$$

In questo caso, siccome viene considerato esclusivamente il sistema "macchina", il contributo S_{irr} comprende solamente le irreversibilità interne e non le irreversibilità dovute a scambi termici con ΔT non nulli. Tuttavia bisogna evidenziare che le irreversibilità esterne esistono, ma attraverso il sistema preso in esame non è sono note le temperature dei serbatoi coinvolti negli scambi di calore con la macchina e di conseguenza non è possibile calcolare le irreversibilità esterne.



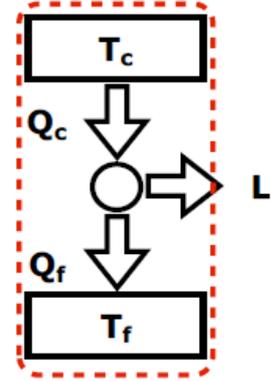
- Bilancio entropico rispetto all'intero sistema**

$$\Delta S_c = - \int \frac{\delta Q_c}{T_c} = - \frac{Q_c}{T_c} \qquad \Delta S_f = \int \frac{\delta Q_f}{T_f} = \frac{Q_f}{T_f}$$

$$\Delta S_{sistema} = \text{Variazione di entropia dei 3 sottosistemi} \rightarrow \Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_{macchina} + \Delta S_f = S_{irr}$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr}$$

Il sistema in esame può essere definito "isolato" a meno di un lavoro scambiato. Tuttavia un lavoro uscente non fornisce nessun contributo entropico, e quindi è valido il principio dell'aumento dell'entropia: la variazione di entropia è quindi maggiore o uguale a zero in quanto tale sistema si comporta come un sistema isolato. In questo caso il contributo S_{irr} comprende sia le irreversibilità esterne sia quelle interne, in quanto vengono contemplati gli scambi termici tra il fluido e i due serbatoi. Per poter calcolare le irreversibilità interne e/o esterne nello specifico, è necessario effettuare ulteriori considerazioni, in quanto sono indistinguibili attraverso l'ultima equazione riportata.



N.B. Le variazioni di entropia ΔS_c e ΔS_f sono diverse rispetto alle variazioni ΔS_{Q_c} e ΔS_{Q_f} , in quanto le temperature T_c e T_f sono note e costanti. Invece ΔS_{Q_c} e ΔS_{Q_f} sono rispettivamente positive e negative, in quanto considerate dal punto di vista della macchina, e sono calcolate rispetto alla temperatura "T" del fluido, mentre ΔS_c e ΔS_f sono rispettivamente negative e positive in quanto considerate rispetto al sistema complessivo ed in particolare rispetto alle temperature dei serbatoi.

Macchina motrice – Caso reversibile (Macchina ideale)

$$\text{Bilancio Energetico} \rightarrow Q_c = L_{id} + Q_f^{id}$$

$$\Delta S_c = - \int \frac{\delta Q_c}{T_c} = - \frac{Q_c}{T_c} \qquad \Delta S_f = \int \frac{\delta Q_f}{T_f} = \frac{Q_f}{T_f}$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_{macchina} + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \text{Siccome si tratta di una macchina ideale } S_{irr} = 0$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = 0 \rightarrow \Delta S_c = -\Delta S_f$$

$$\eta^{id} = \frac{L^{id}}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_f^{id}}{Q_c} = 1 - \frac{\Delta S_f \cdot T_f}{-\Delta S_c \cdot T_c} \rightarrow \text{Noto che } \Delta S_c = -\Delta S_f \rightarrow \eta^{id} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Si noti come per il caso reversibile il rendimento dipenda esclusivamente dalle temperature dei due serbatoi. È inoltre evidente il limite fisico di una macchina motrice, ovvero il valore di rendimento massimo (ideale) è sempre inferiore ad 1 in virtù dell'enunciato di Kelvin: non è infatti realizzabile una macchina tale per cui tutto il calore (Q_c) entrato nel sistema equivale al lavoro (L^{id}) fornito in uscita dalla macchina. Dal punto di vista matematico, infatti, è necessario che il serbatoio freddo abbia una temperatura pari a 0 K (fisicamente impossibile) oppure che il serbatoio caldo abbia una temperatura elevatissima, ma in quest'ultimo caso il rendimento sarebbe di poco inferiore ad 1.

Macchina motrice – Caso irreversibile (Macchina reale)

$$\text{Bilancio Energetico (Fissato } Q_c) \rightarrow Q_c = L + Q_f$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_{macchina} + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \text{Siccome si tratta di una macchina reale } S_{irr} > 0$$

$$\text{Fissati di valori di } Q_c \text{ e } T_c \text{ si ha che: } \Delta S_c \text{ (Caso irreversibile, macchina reale)} = \Delta S_c \text{ (Caso reversibile, macchina ideale)}$$

$$\Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \Delta S_f = S_{irr} - \Delta S_c \rightarrow \text{Note le condizioni relative a } \Delta S_c \text{ riportate in precedenza e con } S_{irr} > 0 \rightarrow \Delta S_f \text{ è aumentato}$$

$$\Delta S_f > \Delta S_f^{irr} \rightarrow \text{A parità di temperatura } (T_f) \rightarrow Q_f > Q_f^{id}$$

$$\text{A parità di } Q_c, \text{ siccome } Q_f > Q_f^{id}, \text{ si ha che } L < L^{id} \rightarrow \text{Di conseguenza } \eta < \eta^{id}$$

Quanto appena ottenuto evidenzia come l'introduzione di irreversibilità comporti una riduzione di rendimento. Al fine di poter confrontare due macchine motrici, una ideale ed una reale, è stato introdotto il **rendimento di 2° principio rispetto al caso ideale**.

$$\eta_{II} = \frac{\eta}{\eta^{id}} \rightarrow \eta_{II} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_f}{T_c}} \rightarrow \text{Il rendimento di 2° principio indica quanto si discosta la macchina reale da quella ideale}$$

N.B. Il rendimento di secondo principio permette di distinguere l'effetto delle temperature rispetto all'effetto delle irreversibilità. Non è banale, infatti, confrontare il rendimento di una macchina reale che opera a temperature distanti con il rendimento di una macchina ideale che opera a temperature molto simili in quanto non è possibile distinguere gli effetti di temperature ed irreversibilità sul rendimento.

Macchina frigorifera

Una macchina frigorifera riesce a trasferire del calore da un corpo freddo ad un corpo caldo sfruttando del lavoro meccanico entrante: in particolare asporta una quantità di calore (Q_f) dal serbatoio avente temperatura (T_f) e cede una quantità di calore (Q_c) al serbatoio avente temperatura (T_c). L'indice di prestazione delle macchine frigorifere non è più il rendimento ma il coefficiente di prestazione (COP) noto anche come "efficienza".

$$COP = \varepsilon = \text{Efficienza} = \frac{Q_f \text{ (Risultato)}}{L \text{ (Costo)}} \rightarrow COP \text{ (Macchina Frigorifera)} > 0 \quad L + Q_f = Q_c$$

Siccome sia la quantità di calore Q_f che la quantità di lavoro L sono entranti, esse sono entrambe positive $\rightarrow COP > 0$

Essendo un sistema diverso rispetto al precedente non vi è alcuna violazione dell'enunciato di Kelvin, in quanto il lavoro non è uscente ma entrante. L'unica condizione relativa al coefficiente di prestazione è l'enunciato di Clausius, il quale afferma che non è possibile avere lavoro nullo poiché non è realizzabile una macchina il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo più caldo ad uno più freddo.

- Bilancio entropico sulla macchina**

$$\Delta S_{Q_c} = - \int \frac{\delta Q_c}{T} \quad \Delta S_{Q_f} = \int \frac{\delta Q_f}{T}$$

$$\Delta S_{macchina} = \Delta S_{Q_c} + S_{irr} + \Delta S_{Q_f}$$

$\Delta S_{macchina} = 0$ in quanto la macchina esegue un numero finito di cicli termodinamici

$$\Delta S_{macchina} = 0 \rightarrow \Delta S_{Q_c} + S_{irr} + \Delta S_{Q_f} = 0 \rightarrow \text{Solo } S_{irr} \text{ (Interne)}$$

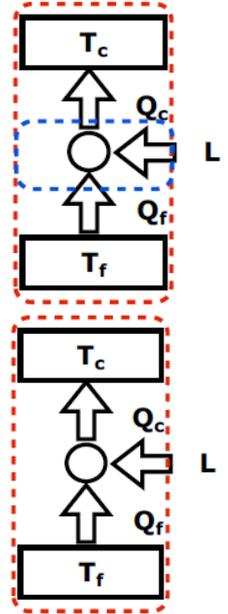
- Bilancio entropico sul sistema**

$$\Delta S_c = \int \frac{\delta Q_c}{T_c} = \frac{Q_c}{T_c} \quad \Delta S_f = - \int \frac{\delta Q_f}{T_f} = - \frac{Q_f}{T_f}$$

$\Delta S_{sistema} =$ Variazione di entropia dei 3 sottosistemi

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_{macchina} + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr}$$

Sia S_{irr} (Interne), sia S_{irr} (Esterne)



Macchina frigorifera – Caso reversibile (Macchina ideale)

Bilancio energetico $\rightarrow L^{id} + Q_f = Q_c^{id}$

$$\Delta S_c = \int \frac{\delta Q_c}{T_c} = \frac{Q_c}{T_c} \quad \Delta S_f = - \int \frac{\delta Q_f}{T_f} = - \frac{Q_f}{T_f}$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_{macchina} + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr}$$

Siccome si tratta di una macchina ideale $S_{irr} = 0$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = 0 \rightarrow \Delta S_c = -\Delta S_f$$

$$COP^{id} = \frac{Q_f}{L^{id}} = \frac{Q_f}{Q_c^{id} - Q_f} = \frac{(-\Delta S_f) \cdot T_f}{\Delta S_c \cdot T_c - (-\Delta S_f) \cdot T_f} \rightarrow \text{Noto che } \Delta S_c = -\Delta S_f \rightarrow COP^{id} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Siccome sia la quantità di calore Q_f che la quantità di lavoro L sono entranti, esse sono entrambe positive $\rightarrow COP^{id} > 0$

Quando la differenza tra le temperature dei due serbatoi è piuttosto ridotta, allora si ha che il COP è elevato. Siccome il coefficiente di prestazione è pari al rapporto tra calore estratto e lavoro in ingresso, se le temperature dei serbatoi sono simili, si ha che il lavoro meccanico (L^{id}) necessario ad estrarre una quantità di calore (Q_f) è ridotto.

Macchina frigorifera – Caso irreversibile (Macchina reale)

$$\text{Bilancio Energetico (Fissato } Q_f) \rightarrow Q_f = Q_c - L$$

$$\Delta S_{\text{sistema}} = \Delta S_c + \Delta S_{\text{macchina}} + \Delta S_f = S_{\text{irr}} \rightarrow \Delta S_{\text{sistema}} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{\text{irr}} \rightarrow \text{Siccome si tratta di una macchina reale } S_{\text{irr}} > 0$$

$$\text{Fissati di valori di } Q_f \text{ e } T_f \text{ si ha che: } \Delta S_f \text{ (Caso irreversibile, macchina reale)} = \Delta S_f \text{ (Caso reversibile, macchina ideale)}$$

$$\Delta S_c + \Delta S_f = S_{\text{irr}} \rightarrow \Delta S_c = S_{\text{irr}} - \Delta S_f \rightarrow \text{Note le condizioni relative a } \Delta S_f \text{ riportate in precedenza e con } S_{\text{irr}} > 0 \rightarrow \Delta S_c \text{ è aumentato}$$

$$\Delta S_c > \Delta S_c^{\text{irr}} \rightarrow \text{A parità di temperatura } (T_c) \rightarrow Q_c > Q_c^{\text{id}}$$

$$\text{A parità di } Q_f, \text{ siccome } Q_c > Q_c^{\text{id}}, \text{ si ha che } L > L^{\text{id}} \rightarrow \text{Di conseguenza } COP < COP^{\text{id}}$$

Quanto appena ottenuto evidenzia come l'introduzione di irreversibilità comporti una riduzione del coefficiente di prestazione. Al fine di poter confrontare due macchine frigorifere, una ideale ed una reale, è stato introdotto il **rendimento di 2° principio rispetto al caso ideale**.

$$\eta_{II} = \frac{COP}{COP^{\text{id}}} \rightarrow \eta_{II} = \frac{COP}{\frac{T_f}{T_c - T_f}} \rightarrow \text{Il rendimento di 2° principio indica quanto si discosta la macchina reale da quella ideale}$$

Pompa di calore

La pompa di calore è una particolare macchina frigorifera, il cui obiettivo è quello di riscaldare il corpo avente temperatura maggiore e non più raffreddare il corpo a temperatura minore. Cambiando l'obiettivo della macchina, ovviamente cambia anche il relativo coefficiente di prestazione.

$$COP = \frac{Q_c \text{ (Risultato)}}{L \text{ (Costo)}} \quad L + Q_f = Q_c$$

$$\text{Siccome sia la quantità di calore } Q_f \text{ che la quantità di lavoro } L \text{ sono entranti, esse sono entrambe positive} \rightarrow Q_c > L + Q_f$$

$$\text{Di conseguenza si ha che: } Q_c > L \rightarrow COP \text{ (Pompa di calore)} > 0$$

- Bilancio entropico sulla macchina**

$$\Delta S_{Q_c} = - \int \frac{\delta Q_c}{T} \quad \Delta S_{Q_f} = \int \frac{\delta Q_f}{T}$$

$$\Delta S_{\text{macchina}} = \Delta S_{Q_c} + S_{\text{irr}} + \Delta S_{Q_f}$$

$$\Delta S_{\text{macchina}} = 0 \text{ in quanto la macchina esegue un numero finito di cicli termodinamici}$$

$$\Delta S_{\text{macchina}} = 0 \rightarrow \Delta S_{Q_c} + S_{\text{irr}} + \Delta S_{Q_f} = 0 \rightarrow \text{Solo } S_{\text{irr}} \text{ (Interne)}$$

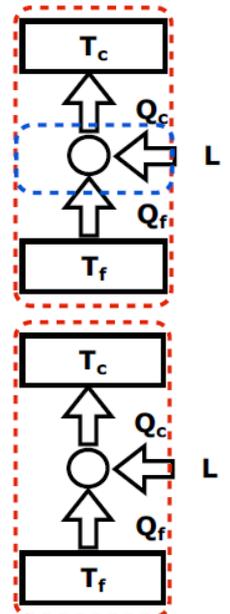
- Bilancio entropico sul sistema**

$$\Delta S_c = \int \frac{\delta Q_c}{T_c} = \frac{Q_c}{T_c} \quad \Delta S_f = - \int \frac{\delta Q_f}{T_f} = - \frac{Q_f}{T_f}$$

$$\Delta S_{\text{sistema}} = \text{Variazione di entropia dei 3 sottosistemi} \rightarrow \Delta S_{\text{sistema}} = \Delta S_c + \Delta S_{\text{macchina}} + \Delta S_f = S_{\text{irr}}$$

$$\Delta S_{\text{sistema}} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{\text{irr}}$$

$$\text{Sia } S_{\text{irr}} \text{ (Interne), sia } S_{\text{irr}} \text{ (Esterne)}$$



Pompa di calore – Caso reversibile (Macchina ideale)

$$\text{Bilancio energetico} \rightarrow L^{id} + Q_f^{id} = Q_c$$

$$\Delta S_c = \int \frac{\delta Q_c}{T_c} = \frac{Q_c}{T_c} \quad \Delta S_f = - \int \frac{\delta Q_f}{T_f} = - \frac{Q_f}{T_f}$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_{macchina} + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \text{Siccome si tratta di una macchina ideale } S_{irr} = 0$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = 0 \rightarrow \Delta S_c = -\Delta S_f$$

$$COP^{id} = \frac{Q_c}{L^{id}} = \frac{Q_c}{Q_c - Q_f^{id}} = \frac{(\Delta S_c) \cdot T_c}{\Delta S_c \cdot T_c - (-\Delta S_f) \cdot T_f} \rightarrow \text{Noto che } \Delta S_c = -\Delta S_f \rightarrow COP^{id} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Siccome sia la quantità di calore Q_f che la quantità di lavoro L sono entranti, esse sono entrambe positive $\rightarrow Q_c > L + Q_f$

Di conseguenza si ha che: $Q_c > L \rightarrow COP^{id} \text{ (Pompa di calore)} > 0$

Quando la differenza tra le temperature dei due serbatoi è piuttosto ridotta, allora si ha che il COP è elevato. Siccome il coefficiente di prestazione è pari al rapporto tra calore ceduto e lavoro in ingresso, se le temperature dei serbatoi sono simili, si ha che il lavoro meccanico (L^{id}) necessario per cedere una quantità di calore (Q_c) è ridotto.

Pompa di calore – Caso irreversibile (Macchina reale)

$$\text{Bilancio Energetico (Fissato } Q_c) \rightarrow Q_c = Q_f + L$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_{macchina} + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \text{Siccome si tratta di una macchina reale } S_{irr} > 0$$

Fissati di valori di Q_c e T_c si ha che: ΔS_c (Caso irreversibile, macchina reale) = ΔS_c (Caso reversibile, macchina ideale)

$$\Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr} \rightarrow \Delta S_f = S_{irr} - \Delta S_c \rightarrow \text{Note le condizioni relative a } \Delta S_c \text{ riportate in precedenza e con } S_{irr} > 0 \rightarrow \Delta S_f \text{ è aumentato}$$

$$\Delta S_f > \Delta S_f^{irr} \rightarrow -\Delta S_f < -\Delta S_f^{irr} \rightarrow \text{A parità di temperatura } (T_f) \rightarrow Q_f < Q_f^{id}$$

A parità di Q_c , siccome $Q_f < Q_f^{id}$, si ha che $L > L^{id} \rightarrow$ Di conseguenza $COP < COP^{id}$

Quanto appena ottenuto evidenzia come l'introduzione di irreversibilità comporti una riduzione del coefficiente di prestazione. Al fine di poter confrontare due pompe di calore, una ideale ed una reale, è stato introdotto il **rendimento di 2° principio rispetto al caso ideale**.

$$\eta_{II} = \frac{COP}{COP^{id}} \rightarrow \eta_{II} = \frac{COP}{\frac{T_c}{T_c - T_f}} \rightarrow \text{Il rendimento di 2° principio indica quanto si discosta la macchina reale da quella ideale}$$

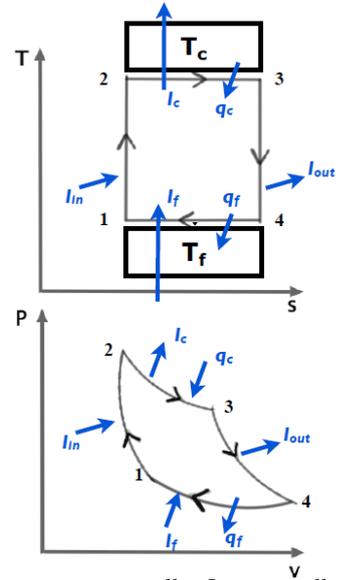
Ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è un ciclo irrealizzabile a livello pratico che rappresenta l'idealità. Innanzitutto, si ipotizzi di poter eseguire trasformazioni internamente reversibili e che il gas in esame sia un gas ideale. Il ciclo di Carnot è basato su quattro trasformazioni: due trasformazioni isoterme (irreversibilità esterne nulle) e due trasformazioni isoentropiche (irreversibilità interne nulle).

Le trasformazioni "1-2" e "3-4" sono rispettivamente una trasformazione di compressione isoentropica ed una trasformazione di espansione isoentropica. Invece le trasformazioni "2-3" e "4-1" sono due trasformazioni isoterme.

Isoterma "2-3"	Sistema chiuso	$u_i + q_c = l_c + u_f \rightarrow \text{Con } \Delta u = c_v \Delta T \text{ e } \Delta T = 0$	$q_c = l_c$
	Sistema aperto	$h_i + q_c = l_c + h_f \rightarrow \text{Con } \Delta h = c_p \Delta T \text{ e } \Delta T = 0$	$q_c = l_c$
Sia nel caso di un sistema aperto che per un sistema chiuso si ha che: $q_c = l_c$			

Isoterma "4-1"	Sistema chiuso	$u_i + l_f = q_f + u_f \rightarrow \text{Con } \Delta u = c_v \Delta T \text{ e } \Delta T = 0$	$q_f = l_f$
	Sistema aperto	$h_i + l_f = q_f + h_f \rightarrow \text{Con } \Delta h = c_p \Delta T \text{ e } \Delta T = 0$	$q_f = l_f$
Sia nel caso di un sistema aperto che per un sistema chiuso si ha che: $q_f = l_f$			



N.B. Siccome in questo caso si tratta di trasformazioni internamente reversibili le irreversibilità, ovviamente, sono nulle. Invece, nelle trasformazioni "2-3" e "4-1" le variazioni di temperatura sono nulle e quindi anche le irreversibilità esterne sono nulle.

Al fine di dimostrare che il ciclo di Carnot è effettivamente la rappresentazione di un ciclo ideale bisogna ottenere che il suo rendimento sia pari al rendimento di una macchina motrice ideale, ovvero: $\eta^{id} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$. Il primo passaggio consiste nel riportare il bilancio energetico.

$$\text{Bilancio energetico (Ciclo di Carnot)} \rightarrow q_c + l_{in} + l_f = q_f + l_{out} + l_c$$

- Ciclo di Carnot – Trasformazioni isoentropiche (Caso di un sistema aperto)**

$$h_1 + l_{in} = h_2 \rightarrow l_{in} = h_2 - h_1 \rightarrow l_{in} = C_p(T_2 - T_1)$$

$$h_3 = l_{out} + h_4 \rightarrow l_{out} = h_3 - h_4 \rightarrow l_{out} = C_p(T_3 - T_4) \rightarrow \text{Dove } T_3 = T_2 \text{ e } T_4 = T_1 \rightarrow l_{out} = C_p(T_2 - T_1)$$

$$\text{Dunque si ha che } l_{in} = l_{out}$$

- Ciclo di Carnot – Trasformazioni isoentropiche (Caso di un sistema chiuso)**

$$u_1 + l_{in} = u_2 \rightarrow l_{in} = u_2 - u_1 \rightarrow l_{in} = C_v(T_2 - T_1)$$

$$u_3 = l_{out} + u_4 \rightarrow l_{out} = u_3 - u_4 \rightarrow l_{out} = C_v(T_3 - T_4) \rightarrow \text{Dove } T_3 = T_2 \text{ e } T_4 = T_1 \rightarrow l_{out} = C_v(T_2 - T_1)$$

$$\text{Dunque si ha che } l_{in} = l_{out}$$

- Ciclo di Carnot – Trasformazioni isoterme**

$$q_c = \int_2^3 T \cdot ds \rightarrow q_c = T_c(s_3 - s_2) \rightarrow \text{In virtù di quanto affermato in precedenza} \rightarrow q_c = l_c \rightarrow l_c = T_c(s_3 - s_2)$$

$$q_f = - \int_4^1 T \cdot ds \rightarrow q_f = T_f(s_4 - s_1) \rightarrow \text{In virtù di quanto affermato in precedenza} \rightarrow q_f = l_f \rightarrow l_f = T_f(s_4 - s_1)$$

Rendimento del ciclo di Carnot

$$\eta = \frac{\text{Effetto Netto (Risultato)}}{\text{Costo}} = \frac{l_{tot}}{q_c}$$

$$l_{tot} = l_{out} + l_c - l_{in} - l_f \rightarrow l_{tot} = l_c - l_f$$

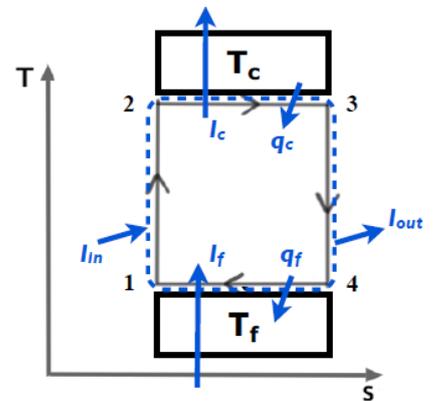
$$\text{Siccome } s_3 = s_4 \text{ ed } s_2 = s_1 \rightarrow l_{tot} = (T_c - T_f)(s_4 - s_1)$$

$$l_c = T_c(s_3 - s_2) \rightarrow \text{Siccome } s_3 = s_4 \text{ ed } s_2 = s_1 \rightarrow l_c = T_c(s_4 - s_1)$$

$$\eta = \frac{(T_c - T_f)(s_4 - s_1)}{T_c(s_4 - s_1)} \rightarrow \eta = \frac{T_c - T_f}{T_c} \rightarrow \text{Siccome } T_c = T_2 = T_3 \text{ e } T_f = T_1 = T_4$$

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{T_3 - T_4}{T_3} \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_4}{T_3}$$

Effettivamente il rendimento del ciclo di Carnot è pari al rendimento di una macchina motrice ideale.



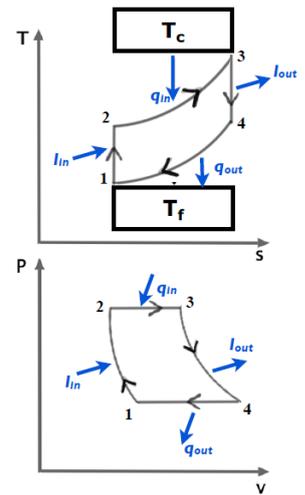
N.B. Lo scambio termico con $\Delta T = 0$ è una astrazione: è sempre necessaria una variazione di temperatura per promuovere uno scambio di calore.

Lezione del 21 ottobre 2021

Ciclo Joule-Brayton (Ideale)

Il ciclo Joule-Brayton prevede che il gas al suo interno si comporti in modo ideale e che le trasformazioni relative ad esso siano internamente reversibili. Tale ciclo è un diretto discendente del ciclo di Carnot avente però alcune differenze. Entrambi i cicli sono in grado di realizzare trasformazioni isoentropiche: in particolare la trasformazione di compressione isoentropica "1-2" può essere realizzata attraverso un compressore, mentre la trasformazione di espansione isoentropica "3-4" può essere realizzata attraverso una turbina. La differenza tra i due cicli riguarda le trasformazioni "2-3" e "4-1": nel ciclo di Joule le trasformazioni isoterme sono state sostituite da due trasformazioni isobare. Questa modifica è stata apportata puramente per motivi ingegneristici, poiché le trasformazioni isoterme sono tecnologicamente impossibili.

Il ciclo inizia dalla condizione "1", la cui temperatura è pari a T_f , e successivamente vi è una compressione isoentropica fino alla condizione "2", la cui temperatura è minore di T_c . A questo punto il gas viene sottoposto ad una trasformazione isobara durante la quale viene fornito del calore in ingresso fino a raggiungere la condizione "3", la cui temperatura è pari a T_c . Successivamente il gas in esame viene sottoposto prima ad una espansione isoentropica, tramite una turbina, fino a raggiungere la condizione "4" a temperatura superiore a T_f ed infine viene effettuata una trasformazione isobara durante la quale viene ceduto del calore in uscita fino a raggiungere la condizione di partenza "1". Definiti tutti gli scambi energetici è possibile ottenere il bilancio energetico.



- Bilancio energetico – Ciclo Joule-Brayton Ideale**

$$\text{Bilancio energetico} \rightarrow q_{in} + l_{in} = q_{out} + l_{out}$$

$$\text{Compressione tramite compressore (da 1 a 2)} \rightarrow h_1 + l_{in} = h_2 \rightarrow l_{in} = h_2 - h_1$$

$$\text{Siccome si tratta di un gas ideale si ha che: } l_{in} = h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1)$$

$$\text{Riscaldamento isobaro tramite scambiatore di calore (da 2 a 3)} \rightarrow h_2 + q_{in} = h_3$$

$$\text{Siccome si tratta di un gas ideale si ha che: } q_{in} = h_3 - h_2 = C_p(T_3 - T_2)$$

$$\text{Espansione tramite turbina (da 3 a 4)} \rightarrow h_3 = h_4 + l_{out} \rightarrow l_{out} = h_3 - h_4$$

$$\text{Siccome si tratta di un gas ideale si ha che: } l_{out} = h_3 - h_4 = C_p(T_3 - T_4)$$

$$\text{Raffreddamento isobaro tramite scambiatore di calore (da 4 a 1)} \rightarrow h_4 = q_{out} + h_1$$

$$\text{Siccome si tratta di un gas ideale si ha che: } q_{out} = h_4 - h_1 = C_p(T_4 - T_1)$$

Al fine di poter calcolare il bilancio energetico è "sufficiente" sapere le temperature relative alle quattro condizioni del ciclo di Joule-Brayton. Solitamente le temperature relative alle condizioni "1" e "3" sono note in quanto coincidono con le temperature dei due serbatoi, mentre le restanti temperature devono essere calcolate sfruttando i valori di pressione delle due isobare. A tale scopo viene introdotto un indice, pari al rapporto tra la pressione finale e la pressione iniziale di una trasformazione di compressione, noto come **rapporto di compressione** (β).

$$\beta = \frac{P_2}{P_1} \rightarrow \text{Siccome si hanno due trasformazioni isobare } P_2 = P_3 \text{ e } P_1 = P_4 \rightarrow \beta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_4}$$

Siccome in un ciclo Joule-Brayton il gas al suo interno si comporta in modo ideale e le trasformazioni relative ad esso sono internamente reversibili è possibile utilizzare le relazioni per le trasformazioni politropiche.

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \rightarrow \text{Nelle trasformazioni isoentropiche si ha che } n = k = \frac{C_p}{C_v} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\text{Inoltre, con } \frac{P_2}{P_1} = \beta, \text{ si ha che } T_2 = T_1 \cdot \beta^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} \rightarrow \text{Poichè } \frac{P_4}{P_3} = \frac{1}{\beta} \rightarrow T_4 = T_3 \cdot \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}}$$

$$\begin{cases} T_2 = T_1 \cdot \beta^{\frac{k-1}{k}} & \frac{T_2}{T_1} = \beta^{\frac{k-1}{k}} \\ T_4 = T_3 \cdot \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}} & \frac{T_4}{T_3} = \beta^{-\frac{k-1}{k}} \end{cases} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$$

- Rendimento del ciclo Joule-Brayton Ideale**

Noto che $l_{tot} = l_{out} - l_{in}$ si ha che il rendimento è pari al rapporto tra l_{tot} e q_{in}

Inoltre si ha, dal bilancio energetico, che: $l_{out} - l_{in} = q_{in} - q_{out}$

$$\eta = \text{Rendimento} = \frac{l_{tot}}{q_{in}} = \frac{l_{out} - l_{in}}{q_{in}} = \frac{q_{in} - q_{out}}{q_{in}} \rightarrow \eta = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}}$$

Sapendo che $q_{out} = h_4 - h_1 = C_p(T_4 - T_1)$ e che $q_{in} = h_3 - h_2 = C_p(T_3 - T_2)$ si ottiene $\rightarrow \eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1}$

Siccome dall'uguaglianza precedente è noto che $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$ essa equivale a $\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$

In virtù di ciò si ha che: $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_4}{T_1} - 1} \rightarrow \eta_{\text{Joule-Brayton}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

Quanto appena ottenuto mette in evidenza la relazione tra il rendimento del ciclo Joule-Brayton ed il rendimento relativo al ciclo di Carnot. Nel primo la temperatura relativa allo stato "2" è inferiore rispetto alla temperatura relativa allo stato "2" nel ciclo di Carnot: quindi, a parità di temperatura T_1 il rendimento del ciclo di Joule-Brayton è minore rispetto al ciclo di Carnot. Ragionamento analogo vale per le temperature allo stato "4" nei due cicli termodinamici. L'introduzione delle trasformazioni isobare ha ridotto la temperatura T_2 che non è più uguale alla temperatura del serbatoio caldo T_c : ciò implica un rendimento inferiore.

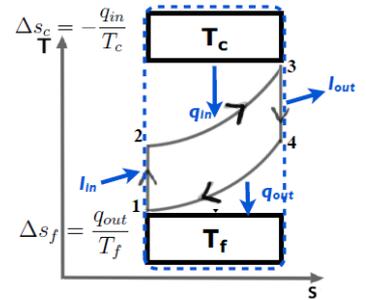
N.B. Tali considerazioni in merito al rendimento valgono indipendentemente sia per un sistema aperto, sia per un sistema chiuso.

- Bilancio entropico sul sistema**

$$\Delta S_{\text{sistema}} = \Delta S_{\text{macchina}} + \Delta S_c + \Delta S_f \rightarrow \Delta S_{\text{sistema}} = \Delta S_c + \Delta S_f$$

$$\Delta S_{\text{sistema}} = S_{\text{irr,est}(c+f)} + S_{\text{irr,int}} \rightarrow \Delta S_{\text{sistema}} = S_{\text{irr,est}(c+f)}$$

In questo ciclo, a differenza del ciclo di Carnot, lo scambio termico tra il fluido ed il serbatoio a temperatura T_c comporta una variazione di temperatura non nulla. Ciò comporta che le irreversibilità esterne non possono essere nulle. Ragionamento analogo vale per lo scambio termico tra il fluido ed il serbatoio a temperatura T_f . Al fine di poter considerare separatamente le variazioni di entropia dovute agli scambi di calore con ΔT non nulli è necessario analizzare due sottosistemi e sfruttare il principio di aumento dell'entropia.



Primo sottosistema \rightarrow Scambio termico con serbatoio caldo

$$\Delta S_{\text{fluido}} (> 0) + \Delta S_c (< 0) = S_{\text{irr,est}(c)} \rightarrow s_3 - s_2 + \Delta S_c = S_{\text{irr,est}(c)} > 0$$

Secondo sottosistema \rightarrow Scambio termico con serbatoio freddo

$$\Delta S_{\text{fluido}} (< 0) + \Delta S_f (> 0) = S_{\text{irr,est}(f)} \rightarrow s_1 - s_4 + \Delta S_f = S_{\text{irr,est}(f)} > 0$$

Noto che $s_3 - s_2 = s_4 - s_1 \rightarrow$ **Primo sottosistema** + **Secondo sottosistema** = $S_{\text{irr,est}(c+f)}$

$$(s_3 - s_2) + \Delta S_c + (s_1 - s_4) + \Delta S_f = S_{\text{irr,est}(c)} + S_{\text{irr,est}(f)} \rightarrow \Delta S_c + \Delta S_f = S_{\text{irr,est}(c)} + S_{\text{irr,est}(f)} = S_{\text{irr,est}(c+f)}$$

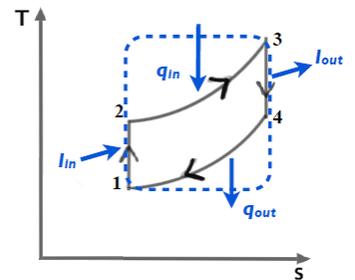
- Bilancio entropico sul ciclo ideale**

Attraverso questa analisi vengono escluse le irreversibilità di tipo esterne, in quanto non viene trattato alcun scambio termico con l'esterno.

$$\Delta S_{q_{in}} + \Delta S_{q_{out}} + S_{\text{irr,int}} = 0 \rightarrow \text{Siccome le trasformazioni sono di tipo TIR} \rightarrow \Delta S_{q_{in}} + \Delta S_{q_{out}} = 0$$

$$\Delta S_{q_{in}} = s_3 - s_2 = C_p \ln \frac{T_3}{T_2} - R \ln \frac{P_3}{P_2} \rightarrow \Delta S_{q_{in}} = C_p \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$\Delta S_{q_{out}} = s_1 - s_4 = C_p \ln \frac{T_1}{T_4} - R \ln \frac{P_1}{P_4} \rightarrow \Delta S_{q_{out}} = C_p \ln \frac{T_1}{T_4}$$



- Componenti del ciclo di Joule-Brayton**

Il ciclo Joule-Brayton è composto da quattro componenti reali: un compressore per la trasformazione da “1” a “2”, uno scambiatore di calore per la trasformazione dallo stato “2” allo stato “3”, una turbina per la trasformazione dallo stato “3” allo stato “4” ed infine uno scambiatore di calore per il passaggio del fluido dallo stato “4” allo stato “1”.

Il rendimento del ciclo Joule-Brayton, nel caso di trasformazioni internamente reversibili, può essere espresso anche in funzione del rapporto di compressione.

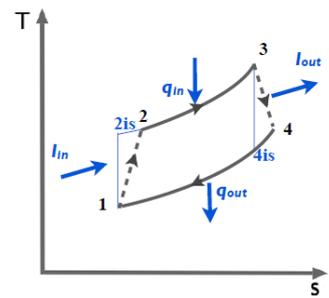
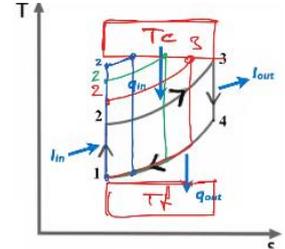
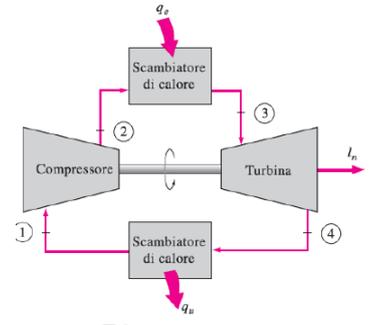
$$\text{Infatti con } \frac{T_2}{T_1} = \beta \text{ si ha che } \eta_{\text{Joule-Brayton}} = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}}$$

È evidente come, all’aumentare del rapporto di compressione, vi sia un aumento del rendimento del ciclo di Joule-Brayton. A livello pratico, un aumento del rapporto di compressione genera una temperatura maggiore alla fine della compressione effettuata dallo stato “1” allo stato “2” e di conseguenza una maggiore temperatura anche allo stato “3” a seguito di una trasformazione isobara. All’aumentare del rapporto di compressione la differenza tra le temperature relative agli stati “2” e “3” tenderà ad assottigliarsi e lo stesso vale anche per le irreversibilità esterne.

- Ciclo Joule-Brayton (Reale)**

Rispetto al caso ideale, il ciclo Joule-Brayton reale è caratterizzato da due trasformazioni isobare realizzate attraverso due scambiatori di calore e da due trasformazioni adiabatiche reali realizzate tramite una turbina con rendimento (η_{is}^T) ed un compressore con rendimento (η_{is}^C). L’introduzione di queste due trasformazioni reali genera delle irreversibilità: ciò viene evidenziato anche a livello grafico in quanto i valori di entropia relativi agli stati “2-reale” e “4-reale” sono maggiori rispetto all’entropia relativa agli stati “2-ideale” e “4-ideale”. Questo, però, non è l’unico effetto dovuto all’introduzione di trasformazioni adiabatiche reali in quanto si evidenzia anche un aumento delle temperature T_2 e T_4 .

N.B. Nel ciclo Joule-Brayton reale non vi sono scambiatori di calore: vengono rappresentati solo in maniera fittizia al fine di analizzare il ciclo in modo più semplice dal punto di vista energetico. I sistemi reali prevedono l’introduzione di una camera di combustione al fine di introdurre calore.



- Bilancio energetico – Ciclo Joule-Brayton Reale**

$$\text{Bilancio energetico} \rightarrow q_{in} + l_{in} = q_{out} + l_{out}$$

$$\text{Compressione tramite compressore (da 1 a 2)} \rightarrow h_1 + l_{in} = h_2 \rightarrow l_{in} = h_2 - h_1$$

$$\text{Siccome si tratta di un gas ideale si ha che: } l_{in} = h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1)$$

$$\text{Riscaldamento isobaro tramite scambiatore di calore (da 2 a 3)} \rightarrow h_2 + q_{in} = h_3$$

$$\text{Siccome si tratta di un gas ideale si ha che: } q_{in} = h_3 - h_2 = C_p(T_3 - T_2)$$

$$\text{Espansione tramite turbina (da 3 a 4)} \rightarrow h_3 = h_4 + l_{out} \rightarrow l_{out} = h_3 - h_4$$

$$\text{Siccome si tratta di un gas ideale si ha che: } l_{out} = h_3 - h_4 = C_p(T_3 - T_4)$$

$$\text{Raffreddamento isobaro tramite scambiatore di calore (da 4 a 1)} \rightarrow h_4 = q_{out} + h_1$$

$$\text{Siccome si tratta di un gas ideale si ha che: } q_{out} = h_4 - h_1 = C_p(T_4 - T_1)$$

N.B. Le temperature T_2 e T_4 , in questo caso, non coincidono con i valori relativi al ciclo Joule-Brayton e di conseguenza anche i valori dei calori e lavori entranti/uscenti scambiati.

- **Rendimento del ciclo Joule-Brayton Reale**

Al fine di poter calcolare il rendimento del ciclo Joule-Brayton reale è necessario calcolare le temperature T_2 e T_4 del ciclo Joule-Brayton ideale associato ad esso: per farlo è utile sfruttare le equazioni relative alle trasformazioni politropiche isentropiche.

$$T_{2,is} = T_1 \cdot \beta^{\frac{K-1}{K}} \quad T_{4,is} = T_3 \cdot \beta^{\frac{1}{K}}$$

Note le due temperature "ideali" è possibile calcolare le corrispondenti temperature a partire dal rendimento isentropico dei due dispositivi.

$$\eta_{is}^T = \frac{l_{out}}{l_{out}^{is}} = \frac{T_3 - T_4}{T_3 - T_{4,is}} \quad \eta_{is}^C = \frac{l_{in}^{is}}{l_{in}} = \frac{T_{2,is} - T_1}{T_2 - T_1}$$

Per definizione si ha che $\eta_{is}^T < 1$ mentre $\eta_{is}^C > 1 \rightarrow$ La turbina produce meno ed il compressore consuma di più

$$\eta_{Reale} = \frac{l_{tot}}{q_{in}} = \frac{l_{out} - l_{in}}{q_{in}} \rightarrow \text{Siccome, rispetto al caso ideale, } l_{out(Reale)} \text{ diminuisce ed } l_{in(Reale)} \text{ aumenta} \rightarrow \eta_{Reale} < \eta_{Ideale} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

N.B. Il rendimento del ciclo reale non può essere espresso in termini di temperatura in quanto non sono più presenti trasformazioni isentropiche le cui relazioni permettono di stabilire i legami tra le temperature T_1, T_2, T_3 e T_4 . Tuttavia, a parità di calore in ingresso, è possibile dedurre che il rendimento reale è inferiore rispetto all'ideale.

- **Bilancio entropico sul ciclo reale**

Nel caso del ciclo reale vi sono, naturalmente, delle irreversibilità di tipo interno generate dal compressore e dalla turbina reale.

$$\Delta s_{q_{in}} + s_{irr,int(T+C)} + \Delta s_{q_{out}} = 0$$

$$s_2 + \Delta s_{q_{in}} = s_3 \rightarrow \Delta s_{q_{in}} = s_3 - s_2 \rightarrow \text{Trattandosi di gas ideale} \rightarrow s_3 - s_2 = C_p \cdot \ln \frac{T_3}{T_2} - R \ln \frac{P_3}{P_2}$$

$$\Delta s_{q_{in}} = s_3 - s_2 = C_p \cdot \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$s_4 + \Delta s_{q_{out}} = s_1 \rightarrow \Delta s_{q_{out}} = s_1 - s_4 \rightarrow \text{Trattandosi di gas ideale} \rightarrow s_1 - s_4 = C_p \cdot \ln \frac{T_1}{T_4} - R \ln \frac{P_1}{P_4}$$

$$\Delta s_{q_{out}} = s_1 - s_4 = C_p \cdot \ln \frac{T_1}{T_4}$$

$$\Delta s_{q_{in}} + s_{irr,int(T+C)} + \Delta s_{q_{out}} = 0 \rightarrow (s_3 - s_2) + s_{irr,int(T+C)} = (s_4 - s_1) \rightarrow s_{irr,int(T+C)} = C_p \cdot \ln \frac{T_4}{T_1} - C_p \cdot \ln \frac{T_3}{T_2}$$

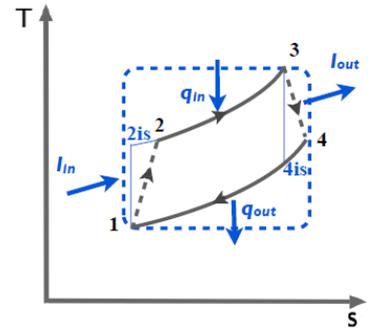
Al fine di poter calcolare le specifiche irreversibilità è necessario considerare le singole trasformazioni effettuate attraverso compressore e turbina.

$$\text{Compressore} \rightarrow s_2 - s_1 = s_{irr,int(C)} = C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\text{In alternativa, si consideri la variazione lungo l'isobara superiore} \rightarrow s_2 - s_1 = s_{irr,int(C)} = C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_{2,isoentropica}}$$

$$\text{Turbina} \rightarrow s_4 - s_3 = s_{irr,int(T)} = C_p \cdot \ln \frac{T_4}{T_3} - R \ln \frac{P_4}{P_3}$$

$$\text{In alternativa, si consideri la variazione lungo l'isobara inferiore} \rightarrow s_4 - s_3 = s_{irr,int(T)} = C_p \cdot \ln \frac{T_4}{T_{4,isoentropica}}$$



Ciclo Joule-Brayton Reale – Aperto

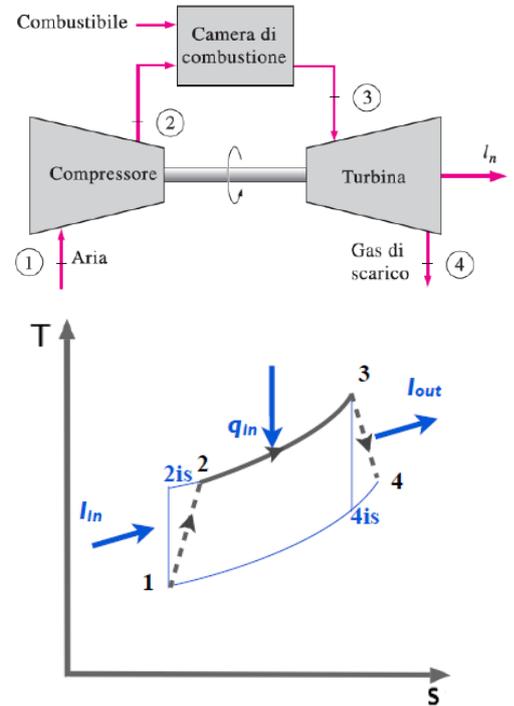
Nella realtà il ciclo Joule-Brayton è un ciclo di tipo aperto e non prevede l'utilizzo di due scambiatori di calore: al loro posto, infatti, vi è solo una camera di combustione il cui compito è quello di fornire calore in ingresso (q_{in}).

Il primo passaggio riguarda l'ingresso nel sistema di una quantità di aria (gas ideale) che viene sottoposta ad una compressione tramite un compressore reale. Successivamente essa raggiunge la camera di combustione, ovvero un "volume controllato", al cui interno viene iniettato del combustibile che reagisce con essa: l'aria, in questo caso, funge da ossidante. Quindi nel ciclo Joule-Brayton il fluido "partecipa" alla combustione. Logicamente il fluido in uscita dalla camera di combustione avrà una composizione chimica differente rispetto al fluido entrato allo stato "2": ciò comporta che $C_{p(AriaIniziale)} \neq C_{p(AriaFinale)}$ e quindi anche $K_{(AriaIniziale)} \neq K_{(AriaFinale)}$. Infine esso viene espanso mediante una turbina reale, producendo del lavoro in uscita, ed espulso in forma di gas di scarico attraverso sistemi di abbattimento.

N.B. Siccome i gas di scarico sono caratterizzati da temperature molto elevate essi si comportano come gas ideali.

$$\dot{L}_{tot} = \dot{L}_{out} - \dot{L}_{in} = \dot{m}_{3-4} \cdot l_{out} - \dot{m}_{1-2} \cdot l_{in}$$

$$\dot{L}_{tot} = \dot{m}_{3-4} \cdot C_{p,3-4} \cdot (T_3 - T_4) - \dot{m}_{1-2} \cdot C_{p,1-2} \cdot (T_2 - T_1)$$



In generale la potenza termica viene calcolata attraverso il potere calorifico inferiore (PCI) $\rightarrow \dot{Q}_{in} = \dot{m}_{CH_4} \cdot PCI_{CH_4}$

In Europa viene utilizzato il PCI, mentre in America ed in Giappone il PCS: la differenza tra i due è che il PCI non tiene conto del calore latente di evaporazione dell'acqua generato durante il processo di combustione. In virtù della definizione di potere calorifico inferiore è errato calcolare il rendimento di una caldaia a condensazione in funzione del PCI: è corretto, invece, sfruttare il valore PCS.

Il calore prodotto dalla camera di combustione viene trasferito al fluido determinando l'incremento di temperatura da T_2 a T_3 .

$$\text{Dunque} \rightarrow \dot{Q}_{in} = \dot{m}_{2-3} \cdot q_{in} = \dot{m}_{2-3} \cdot C_{p,2-3} (T_3 - T_2)$$

$$\text{Rendimento Ciclo Joule - Brayton Reale - Aperto} \rightarrow \eta = \frac{\dot{L}_{tot}}{\dot{Q}_{in}}$$

Rendimento medio Ciclo di Carnot	Rendimento medio Ciclo Joule-Brayton (Ideale)	Rendimento medio Ciclo Joule-Brayton (Reale)
75-80 %	50-55%	30-35%

Limiti tecnologici

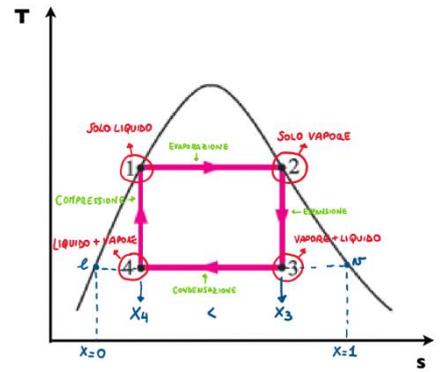
Il valore del rendimento medio del Ciclo Joule-Brayton (Reale) dipende, principalmente, da due limiti tecnologici: la **resistenza termica dei materiali** (T_3) ed il **rapporto di compressione** (β).

- Nonostante i continui sviluppi in ambito metallurgico la temperatura massima (T_3) che può sopportare la turbina è pari a 1350 °C;
- Sebbene sia più conveniente operare in condizioni tali per cui il rapporto di compressione sia elevato, è necessario tenere conto anche del peso della turbina ai fini pratici: per questo motivo il rapporto di compressione (β) assume valori compresi tra 13 e 18.

Lezione del 27 ottobre 2021

Ciclo Rankine

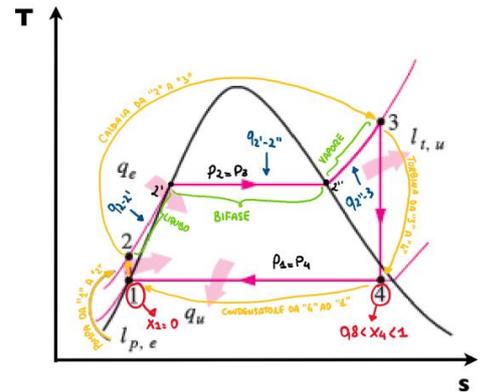
Il ciclo Rankine ha delle applicazioni concrete grazie all'utilizzo di un fluido reale, ovvero l'acqua. Il principio di funzionamento del ciclo Rankine consiste nello sfruttare le transizioni di fase al fine di ottenere delle trasformazioni isotermodariche: nel caso in esame si tratta dell'evaporazione "1-2" e della condensazione "3-4". In aggiunta alle due appena riportate vi sono due trasformazioni isoentropiche, ovvero la compressione "4-1" e l'espansione "2-3". Tuttavia nel realizzare tali trasformazioni sorgono alcune problematiche tecnologiche legate all'impiego dei fluidi bifasici: il punto "4", infatti, si trova in condizioni bifasiche (prevalentemente liquido e vapore) ed anche il punto "3" (prevalentemente vapore e liquido). Comprimerne un fluido bifasico in condizione "4" fino a renderlo monofasico in condizione "1" è molto difficile e ragionamento analogo vale per l'espansione da "2" a "3". La soluzione a questo problema è svolgere la compressione "4-1" e l'espansione "2-3" al di fuori della campana, rispettivamente mediante una pompa ed una turbina. La trasformazione isotermodarica, al di fuori della campana, prosegue come un'isobara: la scelta, del tutto arbitraria, è basata sulla facilità nel realizzare tale trasformazione



N.B. È importante ricordare che il passaggio di stato, ovvero la trasformazione all'interno della campana, avviene attraverso una trasformazione isobara ed anche isoterma, detta isotermodarica.

Ciclo Rankine – TIR

Il fluido reale in esame, ovvero l'acqua, allo stato 1 si trova allo stato liquido ($X_1 = 0$) con una pressione (P_1) bassa. A questo punto il fluido viene compresso mediante l'utilizzo di una pompa fino a raggiungere lo stato 2, a cui corrisponde una pressione (P_2) maggiore ma una temperatura (T_2) ancora troppo bassa. Il passaggio successivo consiste nel riscaldare, mediante una caldaia, il liquido mantenendo la pressione costante fino alla condizione 2': a questo punto il fluido comincerà ad evaporare fino al punto 2'' in cui si ha solo vapore ($X_{2''} = 0$), dopodiché quest'ultimo continuerà ad assorbire calore fino allo stato 3. Successivamente vi è un'espansione di vapore, mediante turbina, tale per cui il risultato 4 è un fluido ($X_4 = 0,9$) avente una piccola quantità di liquido, circa il 10%. Infine, mediante un condensatore, viene estratto il calore dal vapore fino alla sua completa condensazione che avviene allo stato 1.



Compressione (Pompa) → Riscaldamento (Caldaia) → Espansione (Turbina) → Condensazione (Condensatore)

$$q_e = q_{2-2'} + q_{2'-2''} + q_{2''-3} \rightarrow \text{Calore fornito dalla caldaia}$$

N.B. Vengono utilizzate trasformazioni isobare per ottenere isoentropiche con fluido, circa, monofase.

Bilancio energetico – Ciclo Rankine

Primo principio della termodinamica → $q_{caldaia} + l_{pompa} = q_{uscita} + l_{turbina}$

Analisi Caldaia → $q_c + h_2 = h_3 \rightarrow q_c = h_3 - h_2$

Note P_3 e T_3 è possibile **ottenere il valore di h_3** tramite tabelle, mentre non sono note le condizioni "2"

Analisi Pompa (Liquido ideale) → $h_1 + l_p = h_2 \rightarrow l_p = h_2 - h_1$

Si tratta di un liquido ideale → $l_p = C \cdot (T_2 - T_1) + v_1 \cdot (P_2 - P_1) \rightarrow$ **Si ipotizza che la pompa sia ideale (Trasf. Isoentropica)**

Siccome $s_2 - s_1 = C \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$, in una isoentropica si ha che $T_2 = T_1 \rightarrow l_p = v_1 \cdot (P_2 - P_1)$

Dunque → $h_2 - h_1 = v_1 \cdot (P_2 - P_1) \rightarrow h_2 = h_1 + v_1 \cdot (P_2 - P_1)$

Nota P_1 è nota anche T_1 , o viceversa, in quanto il fluido si trova in condizioni di liquido saturo ed è possibile **ottenere h_1 da tabelle**

Analisi Turbina → $h_3 = h_4 + l_t \rightarrow l_t = h_3 - h_4 \rightarrow$ **Ipotizzo turbina ideale (Trasf. Isoentropica)** → $s_3 = s_4$

Nota h_3 è necessario ottenere h_4 → Per ottenere tale valore di entalpia è necessario utilizzare la regola della leva

Regola della leva applicata all'entalpia h_4 → In condizioni "4" si ha coesistenza di fase liquida e vapore

Regola della leva → $h_4 = X_4 \cdot h_v + (1 - X_4) \cdot h_l$

Siccome h_v ed h_l sono valori ottenibili tramite tabelle (vapore saturo e liquido saturo) **per ottenere h_4 manca il valore X_4**

Applico la regola della leva associata all'entropia $s_4 \rightarrow s_4 = X_4 \cdot s_v + (1 - X_4) \cdot s_l \rightarrow$ Siccome $s_3 = s_4 \rightarrow s_3 = X_4 \cdot s_v + (1 - X_4) \cdot s_l$

Siccome s_3 è noto, ed s_v ed s_l sono ottenibili attraverso le tabelle (vapore e liquido saturo) si ottiene $X_4 \rightarrow$ **Noto X_4 si ha h_4**

N.B. Il valore minimo per X_4 , al fine di avere danneggiamenti alla turbina, è pari a 0,8

→ In altri termini, non deve esserci oltre il 20% di acqua liquida in uscita dalla turbina → $X_4 > 0,8$

Rendimento – Ciclo Rankine

$$\eta = \frac{\text{lavoro utile}}{\text{costo}} = \frac{l_{tot}}{q_e} \rightarrow \eta = \frac{l_t - l_p}{q_e} = \frac{q_e - q_u}{q_e} \rightarrow \eta = 1 - \frac{q_u}{q_e}$$

Il contributo maggiore relativo al lavoro utile è fornito dal lavoro della turbina, in quanto comprimere un gas è molto più dispendioso rispetto ad un liquido. Nel ciclo Joule-Brayton, invece, il lavoro per comprimere un gas e quello per comprimere un liquido erano confrontabili.

Esistono diversi modi per poter modificare il rendimento di un ciclo Rankine, ed è importante, quindi, prevederne le variazioni. Affinchè questo sia possibile è necessario riformulare la relativa equazione.

Siccome la trasformazione da 4 ad 1 è una isotermodarica → Temperatura costante → $T_4 = T_1$

$$q_u = - \int_4^1 T_1 \cdot ds = -T_1 \int_4^1 ds = -T_1 \cdot (s_1 - s_4) \rightarrow \text{Siccome } s_1 = s_2 \text{ ed } s_4 = s_3 \rightarrow q_u = -T_1 \cdot (s_2 - s_3) \rightarrow q_u = T_1 \cdot (s_3 - s_2)$$

La trasformazione da 2 a 3 è una isobara → La temperatura aumenta durante la trasformazione → T non costante

Si utilizza un temperatura rappresentativa della trasformazione da 2 a 3 → T_{2-3} → $q_e = T_{2-3} \cdot (s_3 - s_2)$

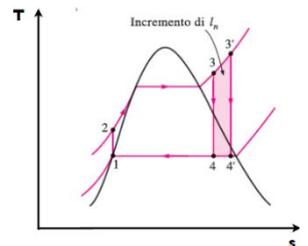
Logicamente è possibile definire anche la temperatura rappresentativa della trasformazione → $T_{2-3} = \frac{q_e}{(s_3 - s_2)}$

$$\begin{cases} \eta = 1 - \frac{q_u}{q_e} \\ q_u = T_1 \cdot (s_3 - s_2) \\ q_e = T_{2-3} \cdot (s_3 - s_2) \end{cases} \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1 \cdot (s_3 - s_2)}{T_{2-3} \cdot (s_3 - s_2)} \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_{2-3}}$$

N.B. Solitamente la temperatura T_{2-3} è leggermente superiore rispetto alla temperatura della transizione di fase, in quanto l'effetto del tratto isobaro sul vapore ad alta temperatura è maggiore rispetto all'effetto del tratto di riscaldamento isobaro sul liquido.

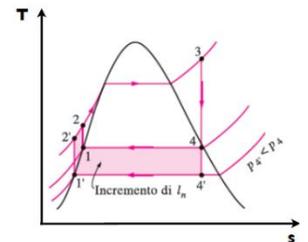
- Aumento della temperatura T_3**

Aumentando la temperatura T_3 fino ad un valore T_3' aumenta anche la temperatura rappresentativa della trasformazione dal punto 2 al punto 3 e ciò comporta, a parità di T_1 , un aumento di rendimento del ciclo. Un ulteriore effetto dovuto all'aumento della temperatura T_3 , che non è intuibile dalla formula del rendimento in funzione della temperatura, è l'aumento del titolo X_4 . Tutti gli effetti legati all'aumento della temperatura T_3 , soprattutto l'ultimo riportato, sono benefici.



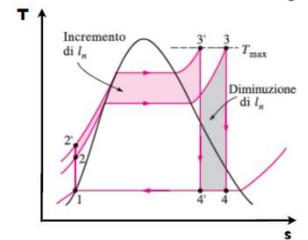
- Riduzione della temperatura T_1**

Riducendo la temperatura T_1 fino ad un valore T_1' si ha un aumento di rendimento del ciclo ed anche una riduzione del titolo X_4 . Inoltre la cessione di calore nella trasformazione da 4' ad 1' deve essere effettuata ad una temperatura non inferiore alla temperatura ambiente. Dunque, non tutti gli effetti dovuti alla riduzione della temperatura T_1 sono benefici.



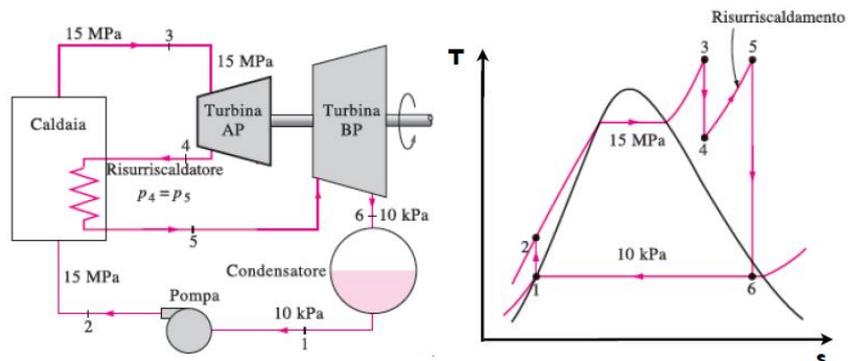
- Aumento della pressione P_2**

Aumentando il valore della pressione P_2 e mantenendo costante la temperatura T_3 si ha un aumento della temperatura rappresentativa T_{2-3} . Ciò comporta un aumento del rendimento del ciclo ma anche una diminuzione del titolo X_4 . Quindi, anche in questo caso, non tutti gli effetti dovuti a questa variazione possono essere valutati positivamente.



Risurriscaldamento

La riduzione della temperatura T_1 e della pressione P_2 generano una riduzione del titolo X_4 , che come noto non è l'ideale per quanto riguarda l'affidabilità della turbina. Al fine di poter evitare questa problematica è stato introdotto un processo noto come "risurriscaldamento". Esso è basato su un'espansione ad alta pressione (P_3) tramite una turbina, seguita da un riscaldamento ed infine un'espansione a bassa pressione (P_5). Così facendo la temperatura massima rimane costante, la temperatura rappresentativa della trasformazione aumenta e di conseguenza anche il rendimento del ciclo. A differenza dei due casi sopracitati non vi è una riduzione del titolo X_4 ma un incremento rispetto alla situazione iniziale.



Turbina reale

In tutti i casi che sono stati analizzati è stata considerata una turbina ideale, ma nella pratica la turbina è di tipo reale: ciò significa che viene introdotto un rendimento isoentropico associato alla turbina.

$$\eta_{is}^T = \frac{l_{reale}}{l_{ideale}} = \frac{h_{in} - h_{out}}{h_{in} - h_{out}^{is}} \rightarrow \text{Siccome non vengono utilizzati gas ideali non è possibile semplificare il rendimento}$$

$$\text{Non consentito} \rightarrow h = c_p \Delta T$$

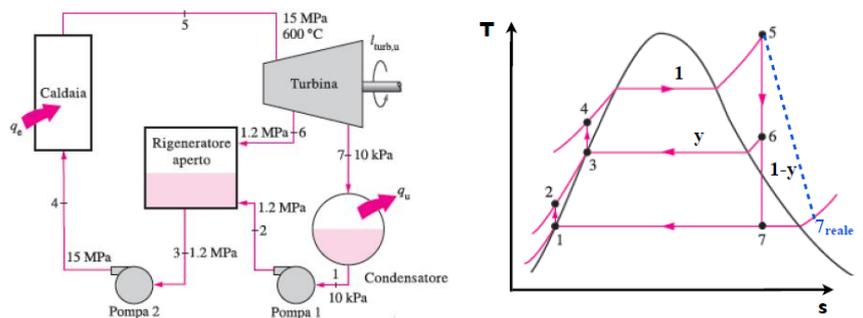
Nel caso in esame si ha che la trasformazione dal punto 3 al punto 4_{isoentropico} è di tipo isoentropica: come dimostrato in precedenza il valore di $h_{4isoentropico}$ può essere ottenuto attraverso la regola della leva: noto il rendimento ed il valore di entalpia $h_{4isoentropico}$ si può ottenere il valore h_{4reale} .

$$\eta_{is}^T = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_{4is}} \rightarrow h_4 = (h_{4is} - h_3) \cdot \eta_{is}^T + h_3 \rightarrow \text{Noto } h_4 \text{ è possibile ottenere } l_{turbina} \rightarrow l_t = h_3 - h_4$$

N.B. Introducendo un rendimento isoentropico si risolve automaticamente il problema relativo al titolo X₄, addirittura nel caso in esame si ha vapore surriscaldato allo stato 4_{reale}, ovvero al di fuori della campana.

Spillamento

Affinchè sia possibile riscaldare l'acqua fino alla temperatura massima è necessario che la temperatura della sorgente sia superiore ad essa: ciò ovviamente risulta essere molto dispendioso soprattutto nella fase iniziale di riscaldamento dell'acqua. La soluzione più "conveniente" sarebbe l'utilizzo di un serbatoio la cui temperatura cresce di pari passo rispetto al processo di riscaldamento dell'acqua: ovviamente, però, questa soluzione risulta praticamente impossibile da realizzare. Dunque, al fine di poter ridurre le irreversibilità di tipo esterne, anziché riscaldare l'acqua con un serbatoio avente temperatura T_c molto elevata, viene opportunamente miscelato del vapore prelevato dalla turbina.



Compressione acqua → Spillamento → Miscelare del vapore proveniente dalla turbina (3) con dell'acqua allo stato liquido (2) → Riscaldamento dell'acqua → Compressione → L'acqua viene riscaldata dalla caldaia (4)

Pressione vapore utilizzato per lo spillamento = Pressione acqua da riscaldare

Rispetto al ciclo senza spillamento

→ La caldaia può portare l'acqua ad una temperatura massima maggiore utilizzando una quantità di calore minore

Se progettato opportunamente lo spillamento permette di avere un **rendimento maggiore**

→ **nonostante un calo del calore fornito dalla caldaia e del lavoro della turbina**

N.B. Un eccessivo spillamento potrebbe provocare una diminuzione del lavoro da parte della turbina dovuta alla riduzione della portata.

Cicli reali

I cicli reali sono caratterizzati, solitamente, da più spillamenti e diversi livelli di pressione. Il ruolo della **caldaia** può essere svolto in diversi modi: attraverso un reattore nucleare oppure attraverso la combustione, accompagnata da sistemi di abbattimento, di carbone, rifiuti o biomasse. Invece le funzioni del **condensatore** vengono assegnate, laddove disponibili, a grandi masse d'acqua come fiumi, laghi e mari. Alternativamente sono state progettate delle strutture ad hoc, ovvero le torri evaporative. Vi sono poi alcuni **limiti tecnologici** relativi ai cicli Rankine ideali.

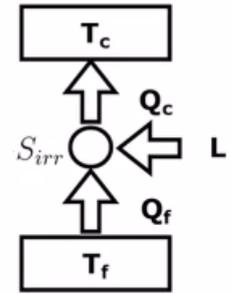
- Temperatura massima ($T_{max} < 700^\circ C$) legata alla resistenza dei materiali;
- Pressione massima ($P_{max} < 300 \text{ bar}$);
- Pressione minima ($P_{min} < 0,03 \text{ bar}$, circa $20^\circ C$);
- $\eta_{Carnot} = 70\% \rightarrow$ **Minore rispetto al rendimento di Joule – Brayton perchè si opera a temperature minori**;
- $\eta_{RK, reale} = 40 - 47\% \rightarrow$ **Maggiore rispetto al rendimento di Joule – Brayton perchè vengono ridotte le irreversibilità**.

Lezione del 28 ottobre 2021

Cicli inversi

Un ciclo inverso è un ciclo termodinamico che viene eseguito non con la produzione di lavoro, bensì con la necessaria somministrazione di lavoro dall'esterno. Se il ciclo inverso è realizzato per somministrare calore ad un ambiente che deve essere mantenuto a temperatura più elevata di quella esterna, si parla di pompa di calore. Nel ciclo frigorifero, invece, si ha il trasferimento di calore da una temperatura più bassa ad una più alta mediante la somministrazione di lavoro. Nel piano di Clapeyron e nel diagramma entropico i cicli inversi percorrono un cammino antiorario, creando un'area chiusa.

$$L + Q_f = Q_c \Delta S_{sistema} = \Delta S_c + \Delta S_f = S_{irr}$$



Macchina frigorifera ideale

Fornendo del lavoro alla macchina essa è in grado di trasferire del calore dal serbatoio a bassa temperatura verso il serbatoio ad alta temperatura.

$$COP = \frac{Q_f}{L} > 0 \rightarrow \text{Nel caso di una macchina ideale} \rightarrow COP^{id} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

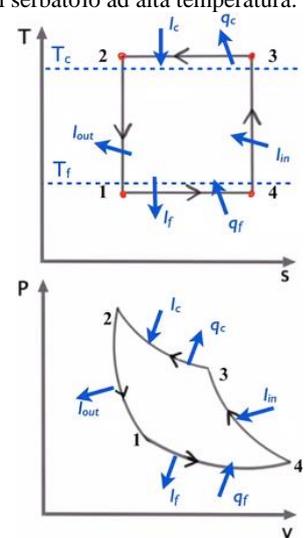
Pompa di calore ideale

Fornendo del lavoro alla macchina essa è in grado di trasferire del calore dal serbatoio a bassa temperatura verso il serbatoio ad alta temperatura.

$$COP = \frac{Q_c}{L} > 1 \rightarrow \text{Per una macchina ideale} \rightarrow COP^{id} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Il ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è in grado di riprodurre il comportamento di una macchina ideale. Il ciclo di Carnot inverso è in grado di riprodurre il funzionamento di una macchina frigorifera o di una pompa di calore ideale. Ipotizzando di eseguire trasformazioni internamente reversibili e di utilizzare un gas ideale, una macchina motrice effettua due trasformazioni isoterme e due trasformazioni isoentropiche: in particolare si ha una riduzione della pressione (espansione) da "1" a "4" ed un aumento della stessa da "3" a "2". Nella trasformazione da "1" a "4" viene generato del lavoro in uscita ed allo stesso tempo viene fornito del calore al fine di mantenere la temperatura costante: affinché questo sia possibile è necessario che il serbatoio abbia una temperatura T_f maggiore di T_1 e T_4 . Nella trasformazione da "4" a "3", grazie al lavoro entrante, vi è un aumento della temperatura del fluido fino al valore T_3 . Invece, nella trasformazione isoterma da "3" a "2", vi è un aumento della pressione (compressione): tale trasformazione è generata da un lavoro entrante e dal calore in uscita. Logicamente, affinché questo sia possibile, è necessario che il serbatoio abbia una temperatura T_c minore di T_3 e T_2 .



$$\text{Bilancio Energetico} - 1^\circ \text{Principio Termodinamica} \rightarrow q_c + l_{out} + l_f = q_f + l_{in} + l_c$$

$$\text{Gas ideale} \rightarrow h_3 - h_4 = h_2 - h_1 \rightarrow l_{in} = h_3 - h_4 \rightarrow l_{out} = h_2 - h_1 \rightarrow l_{in} = l_{out} = C_P(T_2 - T_1)$$

$$\text{Poichè } h_2 = h_3 \rightarrow q_c = l_c \rightarrow q_c = - \int_3^2 T_2 \cdot ds = T_2(s_3 - s_2) = l_c$$

$$\text{Poichè } h_4 = h_1 \rightarrow q_f = l_f \rightarrow q_f = \int_1^4 T_1 \cdot ds = T_1(s_4 - s_1) = l_f$$

$$\text{Bilancio Entropico} - 2^\circ \text{Principio Termodinamica} \rightarrow \Delta S_{ciclo} = \Delta S_c + \Delta S_f + s_{irr}^{int} = 0 \rightarrow \text{Noto che } s_{irr}^{est} = 0 \text{ per } \Delta S_{ciclo}$$

$$\text{Siccome sono trasformazioni TIR} \rightarrow \Delta S_c + \Delta S_f = 0 \rightarrow \Delta S_c = -\Delta S_f \rightarrow -(s_3 - s_2) = (s_4 - s_1) \rightarrow (s_2 - s_3) = (s_4 - s_1)$$

$$\text{Lavoro totale "in ingresso"} \rightarrow l_{tot}^{in} = -l_{out} + l_c + l_{in} - l_f \rightarrow l_{tot}^{in} = l_c - l_f = (T_2 - T_1) \cdot (s_4 - s_1)$$

- **Macchina frigorifera ideale**

$$COP = \frac{Q_f}{L} = \frac{T_1 \cdot (s_4 - s_1)}{(T_2 - T_1) \cdot (s_4 - s_1)} = \frac{T_1}{(T_2 - T_1)} > 0 \quad COP^{ideale} = \frac{T_f}{(T_c - T_f)}$$

Nel caso ideale si ha che $S_{irr}^{int} = 0$ ed anche $S_{irr}^{est} = 0 \rightarrow$ Affinchè $S_{irr}^{est} = 0$ è necessario che $T_c = T_2$ mentre $T_f = T_1$

- **Pompa di calore ideale**

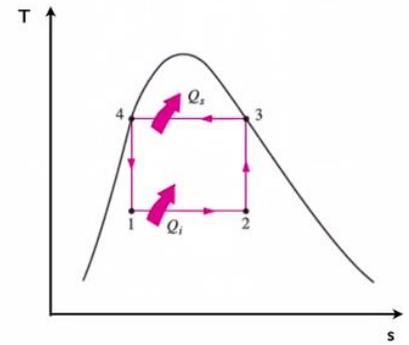
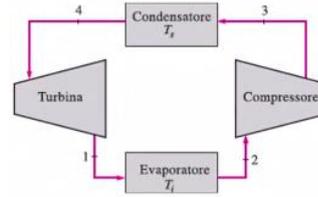
$$COP = \frac{Q_c}{L} = \frac{T_2 \cdot (s_3 - s_2)}{(T_2 - T_1) \cdot (s_3 - s_2)} = \frac{T_2}{(T_2 - T_1)} > 1 \quad COP^{ideale} = \frac{T_c}{(T_c - T_f)}$$

Nel caso ideale si ha che $S_{irr}^{int} = 0$ ed anche $S_{irr}^{est} = 0 \rightarrow$ Affinchè $S_{irr}^{est} = 0$ è necessario che $T_c = T_2$ mentre $T_f = T_1$

Quindi il ciclo di Carnot riesce a raggiungere il COP^{ideale} limite

Il ciclo Rankine

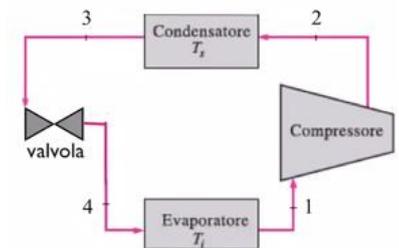
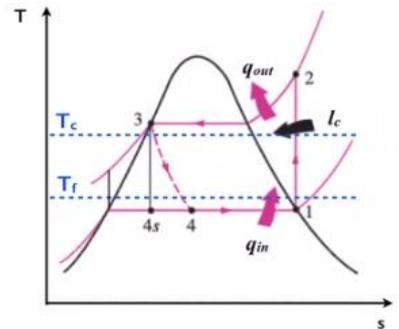
Il metodo più efficace, visto finora, per riprodurre un ciclo simile al ciclo di Carnot è rappresentato dal ciclo Rankine, che prevede lo sfruttamento delle transizioni di fase. Nel caso in esame si sfrutta un fluido reale, ovvero l'acqua. La trasformazione da "1" a "2" è di tipo isotermodarica: in particolare viene acquisito del calore in ingresso che consente l'evaporazione dell'acqua. Allo stato finale della trasformazione il fluido si troverà più allo stato gassoso piuttosto che allo stato liquido e come noto risulta complesso comprimere un fluido bifasico dallo stato bifasico "2" allo stato monofasico "3". Segue poi la condensazione del vapore dallo stato "3" fino allo stato "4" che comporta un rilascio di calore. Infine vi è un'espansione dallo stato monofasico "4" allo stato bifasico "1" con conseguente formazione di vapore.



Idealmente un ciclo Rankine dovrebbe essere costituito da quattro strumenti: un evaporatore, un condensatore, una turbina ed un compressore. Nella pratica, però, i sistemi non sono realizzati in questo modo: essi infatti devono occupare il minor spazio possibile senza perdere efficienza e soprattutto devono essere semplici oltre che a basso costo.

Il ciclo Rankine – Fluido reale con TIR

Il primo passaggio da effettuare è quello di "trasportare" la trasformazione isoentropica da "1" a "2" all'esterno della campana: il passaggio è molto facile in quanto è sufficiente estendere l'evaporazione fino a raggiungere la condizione di vapore saturo ($x_1 = 1$). A questo punto è necessario utilizzare il compressore per comprimere il fluido allo stato gassoso da "1" a "2". Successivamente, per poter passare dallo stato "2" allo stato "3" è opportuno utilizzare un condensatore e la relativa trasformazione isobara, che all'interno della campana è anche isoterma. Nel caso ideale, per espandere il fluido dallo stato "3" fino allo stato "4" sarebbe necessario prolungare la trasformazione isobara fino a determinate condizioni, tali per cui una compressione mediante turbina non generi la copresenza di vapore e liquido. Tuttavia è noto che la compressione/espansione di un liquido è meno dispendiosa a livello energetico rispetto alla compressione/espansione del fluido allo stato gassoso e quindi il lavoro svolto dalla turbina è trascurabile rispetto al lavoro svolto dal compressore. Per questo motivo la turbina viene sostituita con un componente meno costoso come la valvola di laminazione a patto di rinunciare al recupero fornito dall'estensione. La valvola di laminazione esegue una trasformazione isoentropica, con irreversibilità, dal punto "3" al punto "4s": il risultato finale è una miscela bifasica generata dalla riduzione della pressione, da P_3 a P_4 ed un aumento dell'entropia da s_3 ad s_4 . Considerando invece la trasformazione isotermodarica da "4" ad "1" si ha che, rispetto al ciclo caratterizzato da una trasformazione isoentropica dal punto "3" al punto "4s", il titolo x_{4s} è minore del titolo x_4 ed anche la quantità di calore in ingresso è inferiore a causa delle irreversibilità.



Nel caso di una macchina frigorifera avente come fluido l'acqua, alla temperatura di 0°C si avrebbe una pressione inferiore a $0,01$ atm mentre a 35°C una pressione pari a $0,04$ atm. Essendo questi valori inferiori in modo significativo rispetto a quelli dell'ambiente, tutti i tubi e tutti i dispositivi dovrebbero avere uno spessore sufficientemente elevato per sostenere la differenza di pressione tra l'esterno e l'interno. Inoltre, qualora ci fosse un problema di trafilamento, ci sarebbe dell'aria che entra all'interno dei tubi e pertanto il fluido di lavoro non sarebbe più acqua pura. Nella pratica non si utilizza l'acqua, bensì dei fluidi fluorurati: la scelta di tali fluidi è basata sulla necessità di avere determinati valori di pressione nelle condizioni di temperatura di interesse. Questo accorgimento permette di semplificare i cicli, in particolare le tenute, e di evitare contaminazioni.

Analisi del ciclo Rankine

Primo principio della termodinamica (sistema aperto) $\rightarrow q_{in} + l_c = q_{out}$

Evaporatore $\rightarrow q_{in} = h_1 - h_4$

h_1 è nota poichè è sufficiente conoscere il valore di P_1 e/o T_1 , mentre h_4 è incognito

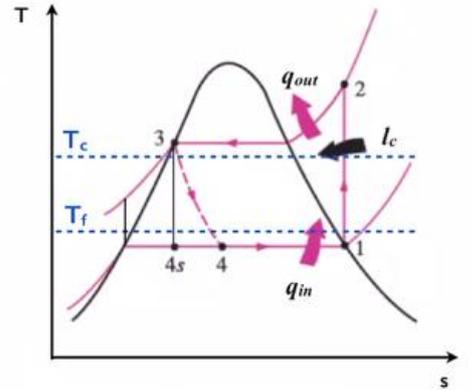
Compressore $\rightarrow l_c = h_2 - h_1 \rightarrow P_2 = P_3$ ed inoltre $s_1 = s_2$

Nota T_2 si ottiene dalle tabelle h_2

Condensatore $\rightarrow q_{out} = h_2 - h_3$

h_3 è nota poichè è sufficiente conoscere il valore di P_3 e/o T_3

Valvola isoentalpica $\rightarrow h_3 = h_4$



Noto h_4 è possibile ottenere anche il valore di $q_{in} \rightarrow$ Tuttavia è **sufficiente conoscere l_c e q_{out} per calcolare $q_{in} = q_{out} - l_c$**

Per ottenere il valore di X_4 è sufficiente conoscere il valore di h_4 poichè h_v ed h_l sono noti \rightarrow Noto X_4 si ottiene s_4

Il valore di s_4 è molto utile poichè consente di calcolare le irreversibilità $\rightarrow s_{irr}^{valvola} = s_4 - s_{4s} = s_4 - s_3$

$s_{irr}^{valvola}$ è associata alla valvola nella configurazione in esame

Si potrebbe avere un'ulteriore irreversibilità associata ad un compressore reale, tale per cui $T_2 > T_{2is}$

\rightarrow Sfrutto il rendimento isoentropico del compressore per calcolare h_2 reale $\rightarrow \eta_{is}^c = \frac{l_{reale}}{l_{ideale}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2is} - h_1}$

$s_{irr}^{compressore} = s_2 - s_{2s} = s_2 - s_1 \rightarrow s_{irr}^{compressore}$ è associata al compressore nella configurazione in esame

A questo punto è possibile calcolare i coefficienti di prestazione

$$COP_F = \frac{q_{in}}{l_c} = \frac{q_{in}}{q_{out} - q_{in}} > 0 \quad COP_{PdC} = \frac{q_{out}}{l_c} = \frac{q_{out}}{q_{out} - q_{in}} = COP_F + 1 > 0$$

N.B. La relazione tra il COP della macchina frigorifera ed il COP della pompa di calore vale sempre, per ogni ciclo in generale.

Macchina invertibile

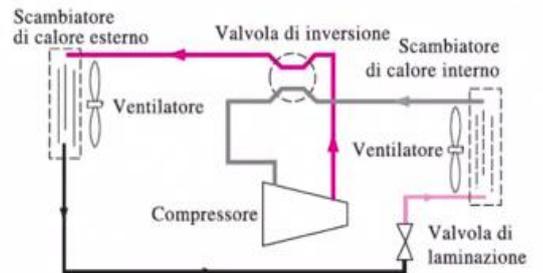
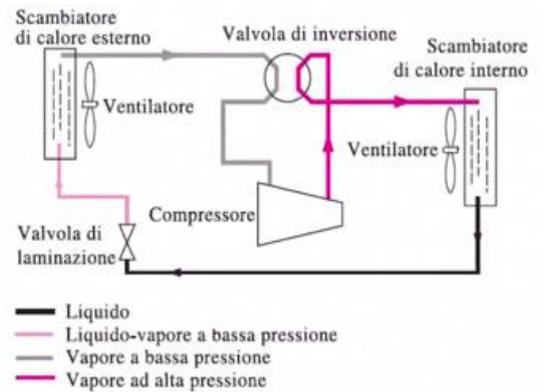
Attualmente esistono delle macchine capaci di funzionare sia come pompe di calore, sia come macchine frigorifere.

Pompa di calore

In uscita dal compressore vi è del vapore ad alta pressione che viene trasferito ad uno scambiatore di calore interno. Quest'ultimo prevede una cessione di calore verso l'esterno (nel caso di un condizionatore verso l'interno dell'edificio). In uscita dallo scambiatore, invece, si ha del liquido che raggiunge la valvola di laminazione, la quale genera del liquido-vapore a bassa pressione. Ipotizzando una temperatura esterna piuttosto bassa (tra 0°C e 5°C), affinché la macchina possa assorbire del calore dall'esterno, è necessario che il fluido all'interno dello scambiatore di calore esterno abbia una temperatura inferiore rispetto alla temperatura esterna. Inoltre, al fine di poter garantire una temperatura interna tra i 20°C ed i 22°C è necessario che venga fornita una quantità di calore tale per cui la temperatura dell'aria all'uscita dello scambiatore di calore sia compresa tra i 25°C ed i 27°C.

Macchina frigorifera

Attivando la valvola di inversione il vapore ad alta pressione viene trasferito dal compressore verso lo scambiatore di calore esterno, dove ci sarà una cessione di calore verso l'esterno. A questo punto il liquido raggiunge la valvola di laminazione, la quale genera del liquido-vapore a bassa pressione che viene trasferito verso lo scambiatore di calore interno. Quest'ultimo funge da evaporatore, ovvero la sua funzione è quella di assorbire del calore in ingresso. Ipotizzando una temperatura esterna piuttosto alta (tra 30°C e 35°C), affinché la macchina possa cedere del calore all'esterno è necessario che la temperatura del fluido sia maggiore rispetto alla temperatura esterna (circa 40°C). Inoltre, al fine di poter garantire uno scambio termico tra la macchina e l'ambiente, la cui temperatura è tra i 25°C ed i 27°C, è necessario che il liquido-vapore a bassa pressione sia ad una temperatura compresa tra i 12°C ed i 15°C.



COP – Sistemi reali

I COP dei sistemi reali sono fortemente dipendenti dalle temperature.

Macchina Frigorifera (T in °C)						
T _a	T _s Ciclo	T _i	T _i Ciclo	COP _{Id}	COP _{Reale}	Rendimento II
35 (Aria)	45	15	10	8	3,2	40%
35 (Aria)	45	-18	-25	3,5	1,9	40%
20 (Acqua)	30	15	10	14	5,7	40%

$$COP_{Id} (Macchina Frigorifera) = \frac{T_i \text{ Ciclo}}{T_s \text{ Ciclo} - T_i \text{ Ciclo}}$$

Attraverso la tabella soprariportata si evidenzia come il COP della macchina frigorifera diminuisca al crescere della differenza tra la temperatura superiore e la temperatura inferiore del ciclo. Nel primo caso, infatti, la differenza di temperatura è pari a 35, nel secondo è pari a 70 e nel terzo è pari a 20: i rispettivi COP ideali, invece, sono pari ad 8 per il primo caso, 3,5 per il secondo e 14 per il terzo. Inoltre si consideri che il COP reale di una macchina frigorifera si aggira intorno al 40% del COP ideale. Nell'ultimo caso viene sfruttata l'acqua anziché l'aria a temperature piuttosto alte: il vantaggio a livello di consumi è evidente, infatti quest'ultima macchina consuma quasi la metà rispetto alla prima, a parità di T_i.

Pompa di Calore (T in °C)						
T _s	T _s Ciclo	T _a	T _i Ciclo	COP _{Id}	COP _{Reale}	Rendimento II
30 (Aria)	40	10	5	9	3,6	40%
50 (Acqua)	60	10	5	6	2,4	40%
30 (Aria)	35	20 (Acqua)	15	15	6,2	40%

$$COP_{Id} (Pompa di Calore) = \frac{T_s \text{ Ciclo}}{T_s \text{ Ciclo} - T_i \text{ Ciclo}}$$

Anche in questo caso la tabella soprariportata evidenzia come il COP della pompa di calore diminuisca al crescere della differenza tra la temperatura superiore e la temperatura inferiore del ciclo. A parità di temperatura ambiente si evidenzia come sia più vantaggioso utilizzare una pompa di calore ad aria piuttosto che ad acqua. L'ultimo caso, invece, rappresenta un sistema più sofisticato di pompa di calore ad aria: in particolare essa è stata progettata in modo tale che siano sufficienti 5°C di differenza tra la temperatura T_s e la temperatura T_s Ciclo affinché possa avvenire lo scambio termico. Inoltre, utilizzando l'acqua di falda anziché l'aria a temperature molto basse, la temperatura T_i Ciclo incrementa notevolmente e quindi anche il COP della pompa.

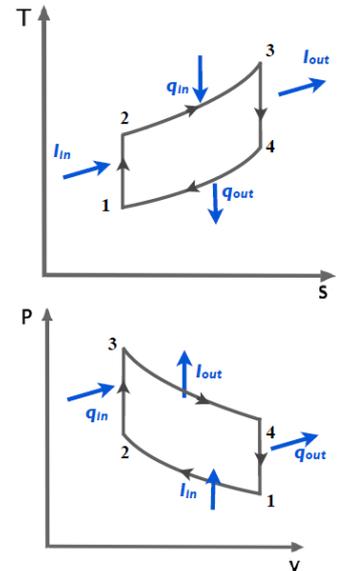
N.B. Le pompe di calore risultano essere molto più efficienti rispetto alle caldaie. Attualmente, ciò che ne limita l'impiego, sono i costi elevati.

Lezione del 4 novembre 2021

Ciclo Otto

Si consideri un sistema cilindro-pistone caratterizzato da trasformazioni internamente reversibili effettuate su un gas ideale, in tal caso l'aria. Ormai è noto che è impossibile, a livello tecnologico, realizzare trasformazioni isoterme e quindi le trasformazioni "2-3" e "4-1" sono isocore facilmente realizzabili in un sistema cilindro-pistone. Graficamente il ciclo Otto risulta essere piuttosto simile al ciclo Joule-Brayton, ma in realtà le trasformazioni "2-3" e "4-1" nel primo dei due cicli sono isocore, mentre nel secondo sono isobare.

La prima trasformazione è una compressione isoentropica, da "1" a "2", che richiede del lavoro in ingresso. Successivamente il fluido viene riscaldato mediante una trasformazione isocora da "2" a "3": essendo il sistema in esame di tipo chiuso, esso richiede esclusivamente del calore entrante. Raggiunta la temperatura massima nel punto "3" viene effettuata una espansione isoentropica da "3" a "4" che determina una produzione di lavoro meccanico uscente. Infine di ha un raffreddamento tramite una trasformazione isocora dal punto "4" al punto "1" con una conseguente cessione di calore verso l'esterno.



Bilancio Energetico – Sistema Chiuso $\rightarrow q_{in} + l_{in} = q_{out} + l_{out}$

$$u_1 + l_{in} = u_2 \rightarrow l_{in} = u_2 - u_1 \rightarrow \text{In un gas ideale} \rightarrow l_{in} = du = C_v(T_2 - T_1)$$

$$u_2 + q_{in} = u_3 \rightarrow q_{in} = u_3 - u_2 \rightarrow \text{In un gas ideale} \rightarrow q_{in} = du = C_v(T_3 - T_2)$$

$$u_3 = l_{out} + u_4 \rightarrow l_{out} = u_3 - u_4 \rightarrow \text{In un gas ideale} \rightarrow l_{out} = du = C_v(T_3 - T_4)$$

$$u_4 = u_1 + q_{out} \rightarrow q_{out} = u_4 - u_1 \rightarrow \text{In un gas ideale} \rightarrow q_{out} = du = C_v(T_4 - T_1)$$

Solitamente è nota la temperatura T_3 ed anche la temperatura T_1 : quindi per conoscere tutte le informazioni relative alle trasformazioni in esame è necessario ottenere le temperature T_2 e T_4 .

$$\rho = \text{Rapporto di espansione} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}$$

$$\text{Poichè si ha una trasformazione TIR di un gas ideale} \rightarrow K = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\text{Essendo anche una trasformazione isoentropica} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{K-1} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \rho^{K-1} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \rho^{K-1}$$

$$\text{Analogamente si ha che} \rightarrow \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{K-1} \rightarrow \frac{T_4}{T_3} = \frac{1}{\rho^{K-1}} \rightarrow T_4 = T_3 \cdot \frac{1}{\rho^{K-1}}$$

$$\text{Ne consegue che} \rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$$

$$\text{Per definizione} \rightarrow \text{Rendimento} = \eta = \frac{l_{tot}}{q_{in}} = \frac{l_{out} - l_{in}}{q_{in}}$$

$$\text{Attraverso il bilancio energetico si ottiene la seguente relazione} \rightarrow l_{tot} = l_{out} - l_{in} = q_{in} - q_{out} \rightarrow \eta = \frac{l_{tot}}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}}$$

$$\begin{cases} \eta = \frac{l_{tot}}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}} \\ q_{in} = C_v(T_3 - T_2) \\ q_{out} = C_v(T_4 - T_1) \end{cases} \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1 \cdot \left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{T_2 \cdot \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)} \rightarrow \text{Siccome } \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1} \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

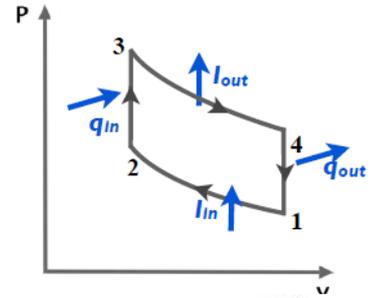
Attraverso le relazioni appena riportate si deduce che la definizione di rendimento per il ciclo Otto è la stessa per il ciclo Joule-Brayton. Ne consegue che, anche in questo caso, il rendimento del ciclo Otto sia sempre inferiore rispetto al rendimento del ciclo Joule-Brayton.

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \rightarrow T_C \text{ è sempre maggiore di } T_2, \text{ mentre } T_f \text{ può essere minore o uguale di } T_1 \rightarrow \eta_{Otto} = 1 - \frac{T_1}{T_2} < \eta_{Carnot}$$

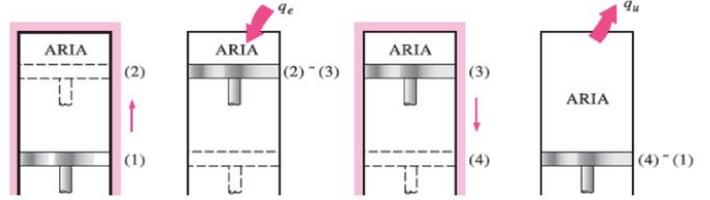
I valori dei rendimenti nei cicli Otto e Joule-Brayton sono inferiori rispetto al rendimento del ciclo di Carnot a causa delle irreversibilità esterne.

Ciclo Otto – Ideale

La trasformazione da “1” a “2” nel grafico P-V in esame è una compressione che, nel sistema cilindro-pistone preso in considerazione, corrisponde ad una riduzione del volume dovuta al movimento del pistone. Trattandosi, nello specifico, di una compressione isoentropica di un gas ideale essa è anche adiabatica, ovvero non vi è alcun scambio di calore. La trasformazione successiva da “2” a “3” è di tipo isocora ed avviene introducendo del calore: ciò comporta un aumento della pressione dovuto all’aumento della temperatura dell’aria a seguito di una trasformazione a volume costante. Il passaggio seguente prevede una espansione del gas mediante una trasformazione isoentropica di un gas ideale, e quindi adiabatica. Nel sistema cilindro-pistone preso in considerazione, tale trasformazione corrisponde ad un aumento del volume dovuto al movimento del pistone. L’ultima trasformazione da “4” ad “1” è di tipo isocora ed avviene rilasciando del calore: ciò comporta una diminuzione della pressione dovuta alla riduzione della temperatura dell’aria a seguito di una trasformazione a volume costante.

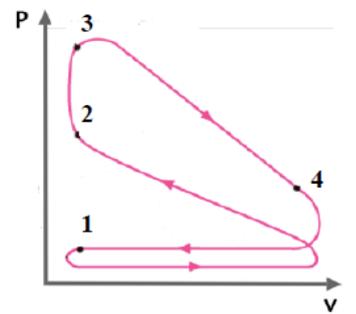


N.B. Ingegneristicamente in un motore a combustione non accade esattamente quanto appena riportato: ciò rappresenta un ciclo ideale.

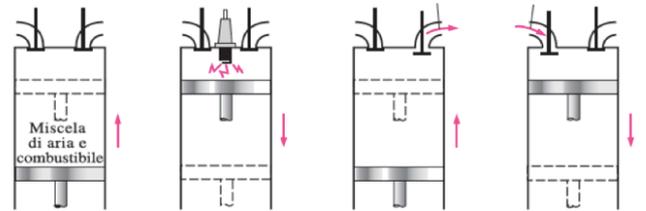


Ciclo Otto – Reale

Il primo passaggio per il ciclo Otto reale consiste nella fase di “carica” del fluido all’interno del cilindro, e ciò avviene mediante l’abbassamento del pistone accompagnato dall’ingresso di una miscela di aria e combustibile attraverso l’apertura di una valvola. La fase successiva consiste nella compressione del fluido fino ad arrivare in prossimità del volume minimo. A questo punto, mentre il pistone continua a comprimere il fluido, vi è la prima differenza importante rispetto al ciclo ideale: anziché fornire del calore dall’esterno viene avviata, tramite una scintilla, una combustione del fluido all’interno del cilindro. Ne consegue, successivamente, un’espansione del fluido tale da abbassare il pistone fino a fondo corsa. Tuttavia all’interno del cilindro non vi è più la miscela di aria e combustibile ma i relativi gas di combustione, quindi è necessario svuotarlo. Perché ciò avvenga viene aperta una valvola, consentendo il processo di “svuotamento” del cilindro attraverso l’innalzamento del pistone. Segue, nuovamente, la fase di “carica” del fluido all’interno del cilindro ed i successivi passaggi. Un motore così progettato viene definito “**motore a quattro tempi**”. Esiste poi una tipologia di motore meno efficiente ed anche di dimensioni minori chiamato “**motore a due tempi**”, in cui le fasi di compressione e di carica erano condensati in un unico step ed anche le fasi di espansione e di scarica erano svolte contemporaneamente. La tipologia di motore più evoluta è rappresentata dal “**motore a iniezione**”, in cui viene introdotta la miscela nei momenti opportuni.



N.B. Logicamente si rivela particolarmente efficace realizzare un motore con più cilindri cosicché possano compensare reciprocamente le relative fasi di “carica” e “scarica” in modo da garantire una continua generazione di potenza.

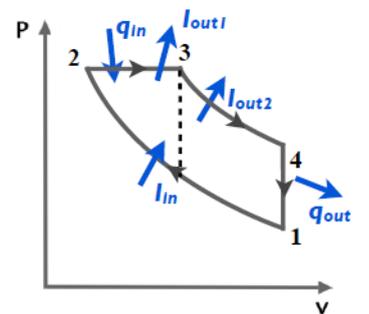


Ciclo Diesel

Il ciclo Diesel rappresenta una evoluzione del ciclo Otto e nasce con l’obiettivo di avere dei rendimenti maggiori. Nel ciclo Diesel, a differenza del ciclo Otto, la prima delle due trasformazioni isocore è sostituita da una trasformazione isobara: quindi nella trasformazione da “2” a “3” si ha calore entrante, ma anche lavoro uscente necessario a bilanciare l’effetto dell’aumento di temperatura, ovvero un aumento di pressione.

Ciclo Diesel – Ideale

La trasformazione da “1” a “2” nel grafico P-V in esame è una compressione isoentropica che, nel sistema cilindro-pistone preso in considerazione, corrisponde ad una riduzione del volume dovuta al movimento del pistone. Trattandosi, nello specifico, di una compressione isoentropica di un gas ideale essa è anche adiabatica, ovvero non vi è alcun scambio di calore. Raggiunto il volume minimo allo stato “2” la trasformazione successiva, fino al punto “3”, non è più isocora ma è di tipo isobara: ciò significa che il pistone si muove, verso il basso, all’interno del cilindro. Ciò si verifica in quanto viene fornito del calore dall’esterno ma contemporaneamente viene eseguito del lavoro in uscita al fine di mantenere la pressione costante. Dopo una determinata quantità di tempo non viene più fornito del calore al sistema cilindro-pistone ma prosegue ugualmente l’espansione. Raggiunto il volume massimo nel punto “4” è necessario raffreddare l’aria tramite una trasformazione isocora fino a raggiungere il punto “1”.

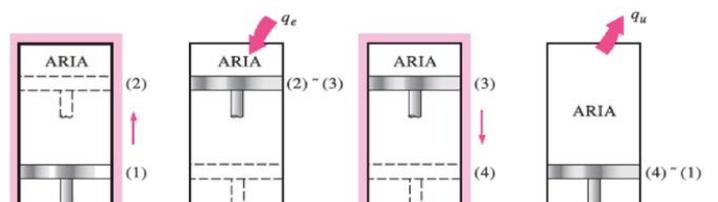


$$\text{Bilancio Energetico} \rightarrow l_{in} + q_{in} = l_{out(1)} + l_{out(2)} + q_{out}$$

$$l_{out} = l_{out(1)} + l_{out(2)} \rightarrow l_{out} - l_{in} = q_{in} - q_{out}$$

$$\text{Rendimento} = \eta = \frac{l_{tot}}{q_{in}} = \frac{l_{out} - l_{in}}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}}$$

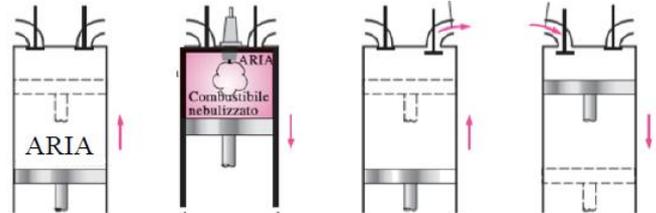
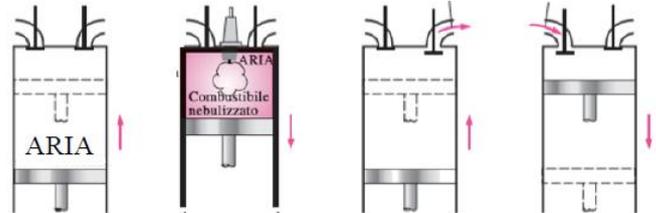
$$\eta = 1 - \frac{C_v T_4 - T_1}{C_p T_3 - T_2}$$



Ciclo Diesel – Reale

La prima differenza evidente rispetto al ciclo Otto consiste nella fase di carico: nel ciclo Diesel viene caricata solamente l'aria, senza combustibile. Successivamente il fluido viene compresso, attraverso una trasformazione isoentropica, fino a raggiungere un volume di poco inferiore al volume minimo. Il passaggio seguente consiste nell'eseguire una trasformazione isobara, che nella pratica corrisponde alla nebulizzazione del gasolio all'interno del cilindro: per alcuni combustibili, come il gasolio, a temperature così alte non è più necessaria la scintilla per avviare la combustione. Il dato caratteristico della benzina è rappresentato dal **numero di ottano**: un valore elevato consente di iniziare la combustione ad alte temperature, dunque è necessaria una scintilla per avviare il processo. Invece il gasolio, che è un olio, ha come informazione caratteristica il **numero di cetano**: ad ogni valore corrisponde una coppia pressione-temperatura tale per cui si avvia la combustione. A differenza della benzina, però, la combustione del gasolio è piuttosto lenta: per questo motivo nei motori più evoluti, ovvero i multijet, vi è una serie di iniezioni opportunamente bilanciate.

A seguito della combustione del gasolio vi è un'espansione del fluido all'interno del cilindro tale da abbassare il pistone fino a fondo corsa. Tuttavia all'interno del cilindro non vi è più la miscela di aria e combustibile ma i relativi gas di combustione, quindi è necessario svuotarlo. Perché ciò avvenga viene aperta una valvola, consentendo il processo di "svuotamento" del cilindro attraverso l'innalzamento del pistone. Segue, nuovamente, la fase di "carica" del fluido all'interno del cilindro ed i successivi passaggi. Il vantaggio rispetto al motore Otto consiste nella fase di compressione ad aria anziché ad aria e combustibile: in questo modo, a seconda della pressione all'interno del cilindro, viene ottimizzato l'utilizzo del gasolio.



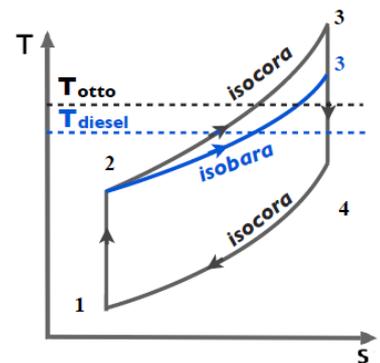
Confronto rendimenti – Otto e Diesel

Noto che il ciclo Diesel è stato sviluppato per avere un rendimento migliore rispetto al ciclo Otto, è necessario verificare tale caratteristica. In questo caso è comodo considerare i due cicli in funzione dell'entropia e della temperatura.

Analisi a parità di coefficiente di compressione (ρ) tra i due cicli

Nel ciclo Otto la compressione da "1" a "2" è seguita da una trasformazione isocora, mentre nel ciclo Diesel essa è seguita da una trasformazione isobara. Noto che le due trasformazioni hanno un andamento esponenziale inversamente proporzionale al valore di C_p , per la trasformazione isobara, ed inversamente proporzionale al valore di C_v , per la trasformazione isocora, si ha che la curva relativa alla trasformazione da "2" a "3" per il ciclo Diesel è inferiore rispetto alla medesima curva del ciclo Otto. Ne consegue che la temperatura rappresentativa della trasformazione isobara da "2" a "3" per il ciclo Diesel è minore rispetto alla temperatura rappresentativa della isocora da "2" a "3" per il ciclo Otto.

$$\eta = \text{Rendimento} = 1 - \frac{T_f}{T_s} \rightarrow \text{A parità di } T_f, \text{ con } T_s(\text{Otto}) > T_s(\text{Diesel}) \rightarrow \eta_{\text{Otto}} > \eta_{\text{Diesel}}$$



N.B. I risultati appena ottenuti, ovviamente, valgono solamente a parità di compressione tra i due cicli: ciò però non corrisponde alla realtà.

Analisi con coefficienti di compressione (ρ) reali

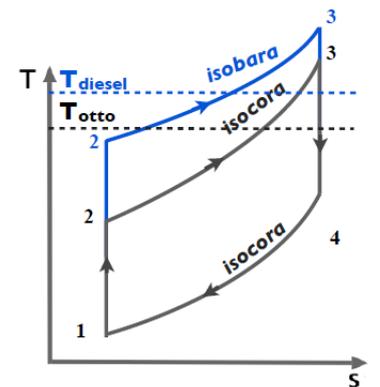
Nella realtà il ciclo Diesel consente una maggiore compressione, e quindi una maggiore temperatura, dell'aria rispetto al ciclo Otto: ciò equivale ad un maggior rapporto di compressione, ovvero a parità di v_1 si ha che $v_2(\text{Diesel}) < v_2(\text{Otto})$. Ne consegue che la temperatura rappresentativa della trasformazione da "2" a "3", nel caso del ciclo Diesel reale, sia maggiore rispetto alla corrispondente temperatura del ciclo Otto reale.

$$\eta = \text{Rendimento} = 1 - \frac{T_f}{T_s} \rightarrow \text{A parità di } T_f, \text{ con } T_s(\text{Otto}) < T_s(\text{Diesel}) \rightarrow \eta_{\text{Diesel}} > \eta_{\text{Otto}}$$

Ovviamente i valori di rendimento sono influenzati da limiti tecnologici, come la temperatura massima (T_{Max}) e l'autoaccensione (nel caso Otto).

$$\rho_{\text{Otto}} = 8 - 11 \rightarrow \eta_{\text{Otto}} = 27 - 33\%$$

$$\rho_{\text{Diesel}} = 16 - 22 \rightarrow \eta_{\text{Diesel}} = 38 - 43\%$$



N.B. Si evince che, nei casi reali, il rendimento di un ciclo Diesel è maggiore, rispetto al rendimento di un ciclo Otto, grazie alla capacità di operare ad un rapporto di compressione maggiore. Ciò comporta, però, dispositivi e componenti più resistenti e quindi costose.

Osservazioni – Motori Diesel e Benzina

La miscela inserita all'interno del cilindro nel ciclo Otto deve avere determinate caratteristiche e la soluzione ideale, ai fini energetici, è rappresentata da una miscela ricca di combustibile, tale per cui esso non viene bruciato completamente. Ciò comporta però un maggiore inquinamento: per questo motivo è stata introdotta la marmitta catalitica che bilancia il rapporto di miscela (kg di aria/kg di combustibile) attraverso la sonda lambda, una componente necessaria per conoscere se i gas di scarico presentano incombusto oppure se sono in eccesso di ossigeno.

Idealmente una combustione dovrebbe essere caratterizzata dalla seguente equazione



In realtà la combustione non è perfetta, quindi tra i prodotti vi sono anche HC (incombusti), CO ed NO_x

Sebbene siano irrilevanti da un punto di vista energetico, il loro contributo in termini di inquinamento non è trascurabile

Per abbattere gli effetti di queste sostanze la marmitta catalitica riduce NO_x in N₂ e ossida HC e CO in H₂O e CO₂

Questo trattamento prevede che anche ai bassi regimi deve essere mantenuto costante il rapporto stechiometrico

Dunque, specialmente nel caso dei motori benzina (Otto), è necessario introdurre combustibile ed aria all'interno del cilindro

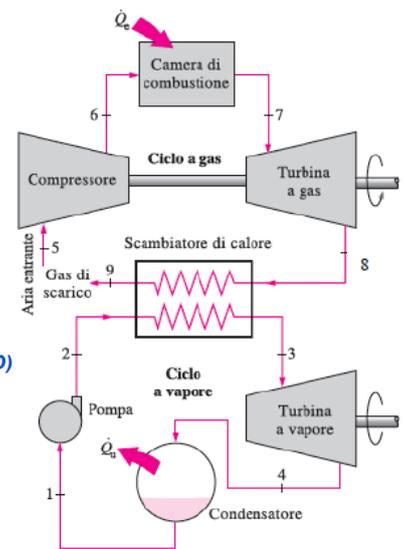
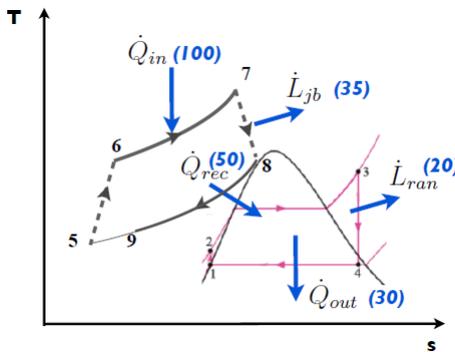
Nel caso dei motori Diesel, invece, viene introdotta prevalentemente aria e una minima quantità di combustibile

Nel motore a benzina il combustibile miscelato con l'aria evapora, mentre nel motore Diesel esso viene introdotto nel cilindro tramite nebulizzazione e le sue goccioline diventano sempre più piccole fino a diventare particolato di carbonio. Il carburante, inoltre, genera anche del particolato di azoto. In entrambi i casi non è possibile "sfruttare" le proprietà della marmitta catalitica ed è quindi necessario utilizzare dei filtri, per catturare il particolato, e sostanze come l'urea (AdBlue) per abbattere gli ossidi di azoto (NO_x).

Ciclo Combinato

I cicli combinati, tipiche delle centrali termoelettriche, prevedono l'abbinamento di un turbogas (Ciclo Joule-Brayton) con un ciclo Rankine. I fumi in uscita dalla turbina del ciclo Joule-Brayton, aventi tipicamente temperature attorno ai 450°C, vengono utilizzati per alimentare la caldaia del ciclo Rankine. Affinchè sia possibile abbinare i due cicli è necessario effettuare delle modifiche tali per cui il ciclo Joule-Brayton sia caratterizzato da un β minore e quindi capace di ottenere temperature maggiori ed il ciclo Rankine possa operare a temperature minori.

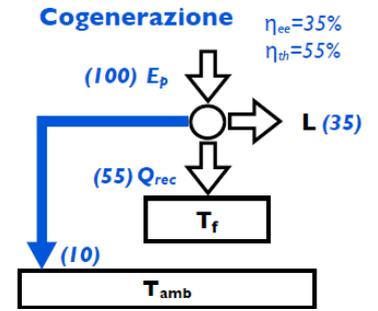
Nel caso in esame la quota di calore rilasciata dal punto "8" al punto "9" nel ciclo Joule-Brayton viene ceduta al ciclo Rankine, mentre la quota di calore rimanente tra "9" e "5" viene dissipata nell'ambiente. Il vantaggio principale del ciclo combinato è rappresentato dall'aumento di rendimento rispetto ai due cicli considerati singolarmente, oltre ad una riduzione delle emissioni grazie all'impiego di gas naturali. Tuttavia tali sistemi non hanno una particolare flessibilità rispetto all'andamento delle energie rinnovabili: nello specifico, quando le centrali termoelettriche devono operare a potenza ridotta il loro rendimento cala e di conseguenza aumentano i consumi.



$$\eta = \frac{\dot{L}_{jb} + \dot{L}_{ran}}{\dot{Q}_{in}} = 53 - 58\% \quad T_{8-9} > T_{2-3}$$

Cogenerazione

La cogenerazione consiste nella generazione combinata di calore e lavoro, nello specifico l'obiettivo è quello di rendere fruibile il calore prodotto. Il motore, generalmente, produce del calore che viene dissipato nell'ambiente. Fino ad ora è risultato conveniente abbassare il più possibile la temperatura T_s di un ciclo al fine di aumentare il rendimento. Invece, per poter sfruttare al meglio il calore, si ha che $T_f > T_{amb}$. Questo nuovo "approccio" risulta essere più adatto per i motori a combustione piuttosto che per i cicli Rankine, in quanto questi ultimi si basano su una temperatura T_f molto bassa (intorno ai 30-35°C). Risulta necessario, quindi, apportare delle modifiche importanti al ciclo Rankine che, inevitabilmente, riducono il suo rendimento.



Data una quantità di energia primaria si ha un rendimento elettrico pari al 35% ed un rendimento termico pari al 55%

Il restante 10% di rendimento termico viene "dissipato" nell'ambiente → Esso corrisponde al raffreddamento dei gas

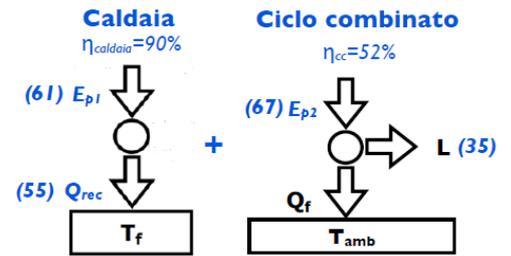
$$\eta_{ee} = \text{Rendimento elettrico} = \frac{L}{E_p} \quad \eta_{th} = \text{Rendimento termico} = \frac{Q_{rec}}{E_p}$$

- **Confronto con il sistema Caldaia + Ciclo combinato**

Per ottenere un rendimento elettrico pari al 35% in un ciclo combinato avente rendimento elettrico pari a 52% è necessario fornire una energia primaria "pari" a $35 \div 0,52 = 67$. Invece, per ottenere un rendimento termico pari al 55% in una caldaia avente rendimento pari al 90% è necessario fornire una energia primaria "pari" a $55 \div 0,90 = 61$.

Nel sistema in esame l'energia primaria totale è pari a $61 + 67 = 128$

Mentre nel caso precedente l'energia primaria è pari a 100



(Sebbene rendimento elettrico e rendimento termico della cogenerazione siano maggiori rispetto ai rendimenti di caldaia e ciclo combinato)

N.B. Pur essendo un meccanismo vantaggioso a livello energetico, a causa delle già elevate emissioni locali, non è possibile sfruttare la cogenerazione. Per questo motivo è preferibile delocalizzare, nei limiti del possibile, le centrali termoelettriche.

Lezione dell'11 novembre 2021

Trasmissione del calore

Attraverso lo studio dei cicli termodinamici è ormai noto che lo scambio termico ha un ruolo fondamentale nella determinazione delle irreversibilità di tipo esterno: in particolare, il trasferimento di calore con variazioni di temperature infinitesime consente di ridurle al minimo. La trasmissione del calore può avvenire attraverso tre fenomeni: la conduzione, la convezione e l'irraggiamento.

- **Conduzione**

La conduzione è il fenomeno che regola il trasferimento di energia, sottoforma di calore, attraverso i corpi ed avviene attraverso la vibrazione molecolare dei costituenti della materia: nello specifico, l'intensità delle vibrazioni, oppure il moto microscopico nel caso dei gas, è direttamente proporzionale alla temperatura. Tuttavia, a livello macroscopico, i fluidi risultano essere in quiete.

Nel caso in esame si ha uno schema rappresentativo relativo alla struttura di un forno, al cui interno la temperatura è pari a 400°C . Si nota come le tre pareti, di cui due in acciaio ed una in rame, generano una dispersione di calore e quindi un gradiente termico negativo, diverso a seconda del materiale, all'aumentare della distanza dall'interno del forno. Per tali ragioni è necessaria la presenza di una fonte costante di calore in ingresso.

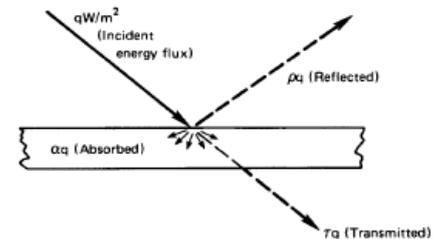
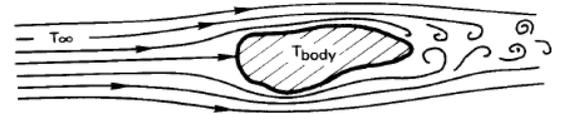
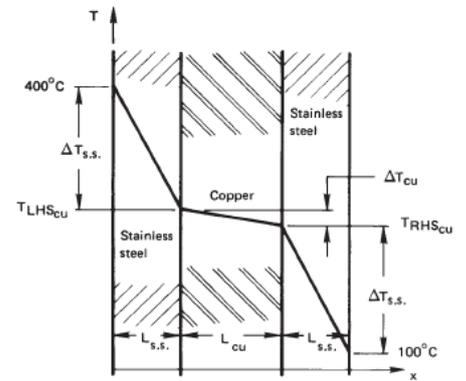
- **Convezione**

Ammettendo il movimento macroscopico dei fluidi, oltre al già presente fenomeno spontaneo di conduzione, vi è un importante contributo fornito dall'energia cinetica del fluido. Nello specifico, oltre ad una naturale tendenza nello scambio di calore da un corpo caldo ad uno freddo, il movimento del fluido contribuisce ulteriormente al trasferimento dello stesso.

Nel caso in esame viene analizzato uno scambio termico tra una massa d'aria avente, inizialmente, una temperatura omogenea pari a T_{Infinite} ed un corpo caldo caratterizzato dalla temperatura T_{Body} , maggiore rispetto alla temperatura del fluido. Il movimento macroscopico genera una "deformazione" del gradiente termico che dipende, appunto, dal moto del fluido.

- **Irraggiamento**

Il trasferimento di calore per irraggiamento, a differenza di conduzione e convezione, può avvenire anche nel vuoto in quanto vengono sfruttati gli effetti associate alle radiazioni elettromagnetiche.



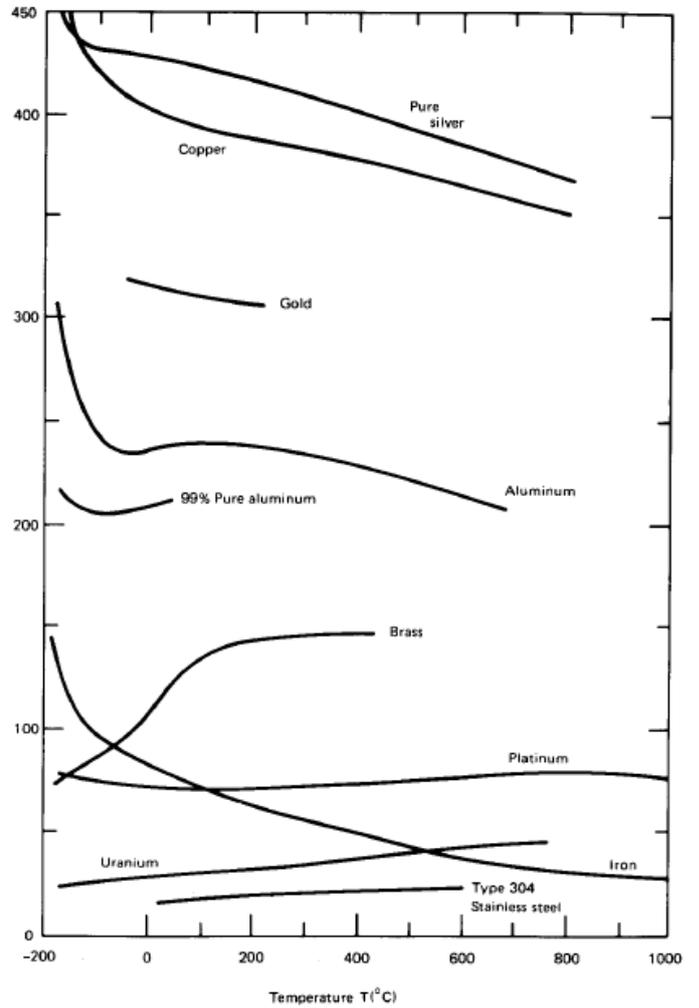
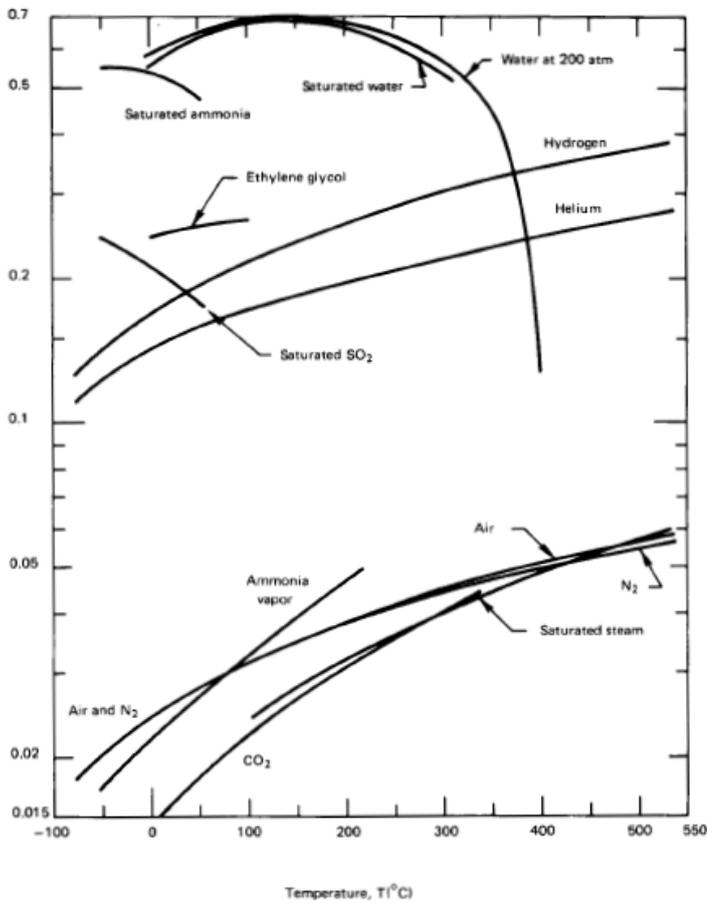
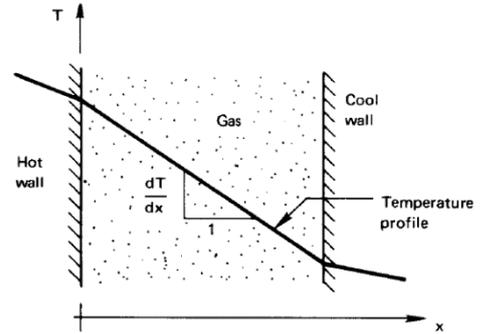
Conduzione

La legge che regola il fenomeno della conduzione è la legge di Fourier, la quale afferma che imposta una certa potenza termica specifica essa è inversamente proporzionale al gradiente termico, che è negativo. In virtù di quanto appena affermato, e coerentemente con il secondo principio della termodinamica, viene riportato il segno “-“ per indicare che il calore fluisce dal corpo più caldo, avente temperatura maggiore, al corpo più freddo, avente temperatura minore. La quantità di potenza termica scambiata è anche direttamente proporzionale al fattore di conducibilità termica, che dipende a sua volta dalle proprietà fisiche dei materiali.

$$\dot{q} = -k \cdot \nabla T = -k \frac{dT}{dx}$$

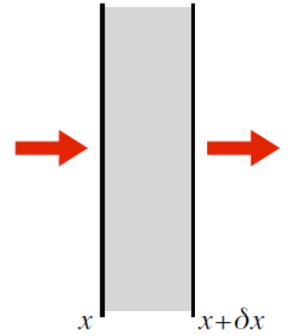
Con \dot{q} fisso, all'aumentare della capacità termica si ha un gradiente di temperatura ridotto
 Con \dot{q} fisso, al diminuire della capacità termica si ha un gradiente di temperatura maggiore

Nel caso dei gas e dei liquidi, generalmente, i valori di conducibilità termica sono compresi tra $0,015 \frac{W}{m \cdot K}$ e $0,7 \frac{W}{m \cdot K}$ mentre nei metalli i valori di conducibilità sono nettamente maggiori, ovvero compresi tra $10 \frac{W}{m \cdot K}$ e $450 \frac{W}{m \cdot K}$. Si nota dai due grafici che, nel caso dei gas, la conducibilità cresce all'aumentare della temperatura, mentre nei metalli avviene l'opposto: tuttavia le variazioni sono relativamente impercettibili, perciò è lecito considerare la conducibilità come una “funzione” costante al variare della temperatura.



Equazione generale della conduzione

Considerando una certa porzione di materia e assunto che vi sia del calore in entrata ed in uscita è possibile modificare il contenuto energetico della sostanza. In particolare, se $\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$ non vi è accumulo energetico e quindi si è in condizioni stazionarie. Nel caso in cui \dot{Q}_{in} fosse maggiore rispetto a \dot{Q}_{out} si avrebbe un accumulo di energia all'interno della porzione di materia: ne consegue che, all'aumentare dell'energia interna, cresce la temperatura e quindi anche il gradiente termico. Dunque, in condizioni non stazionarie, il gradiente termico può variare sia nello spazio che nel tempo, mentre in condizioni stazionarie esso è costante nel tempo. In certe condizioni non stazionarie particolari, il gradiente termico può essere costante nello spazio e variabile soltanto nel tempo.



$$\dot{Q}_{in} = -k \cdot A \cdot \left. \frac{\delta T}{\delta x} \right|_x \quad \dot{Q}_{out} = -k \cdot A \cdot \left. \frac{\delta T}{\delta x} \right|_{x+\delta x}$$

Ipotizzando lavoro nullo e capacità termica costante nel tempo $\rightarrow \dot{Q}_{out}^{tot} = \dot{Q}_{out} - \dot{Q}_{in} = -k \cdot A \cdot \left(\left. \frac{\delta T}{\delta x} \right|_{x+\delta x} - \left. \frac{\delta T}{\delta x} \right|_x \right)$

$$\dot{Q}_{out}^{tot} = -k \cdot A \cdot \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\delta x} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \right) \rightarrow \frac{\dot{Q}_{out}^{tot}}{\delta x} = -k \cdot A \cdot \frac{\left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\delta x} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \right)}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} -k \cdot \frac{\left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\delta x} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \right)}{\delta x} = -k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{Q}_{out}^{tot}}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{Q}_{out}^{tot}}{\partial x} = -k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$\dot{Q}_{out}^{tot} = -\frac{\partial U}{\partial t} > 0 \rightarrow$ Si ha che U diminuisce ($\partial U < 0$) e quindi anche T diminuisce

$\dot{Q}_{out}^{tot} = -\frac{\partial U}{\partial t} < 0 \rightarrow$ Si ha che U aumenta ($\partial U > 0$) e quindi anche T aumenta

$$\dot{Q}_{out}^{tot} = -\frac{\partial U}{\partial t} \rightarrow \frac{\dot{Q}_{out}^{tot}}{\delta x \cdot A} = -\frac{1}{\delta x \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)$$

Potrebbe esserci una generazione di potenza termica all'interno del materiale $\rightarrow \frac{\dot{Q}_{out}^{tot}}{\delta x \cdot A} = -\frac{1}{\delta x \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \dot{g} = -\rho C \cdot \frac{dT}{dt} + \dot{g}$

Dove $U = \rho \cdot u \cdot V$, mentre $\partial u = C \cdot d\tilde{T} \rightarrow$ **N.B.** Si noti che \tilde{T} è la temperatura media del corpo

Ipotizzando che vi sia una potenza termica netta pari a zero $\rightarrow \dot{Q}_{out}^{tot} = 0 \rightarrow \frac{1}{\delta x \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) = \dot{g}$

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}_{out}^{tot}}{\delta x \cdot A} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} -\rho C \cdot \frac{dT}{dt} + \dot{g} \rightarrow \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{Q}_{out}^{tot}}{\partial x} = -\rho C \cdot \frac{dT}{dt} + \dot{g}$$

\rightarrow **N.B.** Si noti che dT è la temperatura effettiva per una superficie avente spessore infinitesimo

$$\begin{cases} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{Q}_{out}^{tot}}{\partial x} = -k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{Q}_{out}^{tot}}{\partial x} = -\rho C \cdot \frac{dT}{dt} + \dot{g} \end{cases} \rightarrow k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C \cdot \frac{dT}{dt} - \dot{g}$$

	Caso 1D	Caso 3D
“k” costante	$k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{g} = \rho C \cdot \frac{dT}{dt}$	$k \cdot \nabla^2 T + \dot{g} = \rho C \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$
“k” variabile in funzione di T	$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{g} = \rho C \cdot \frac{dT}{dt}$	$\nabla \cdot k \nabla T + \dot{g} = \rho C \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$

Lastra senza generazione

Si consideri una lastra composta da un unico materiale, ed incapace di generare potenza termica al suo interno, in regime stazionario.

$$\text{Nel caso con } k \text{ costante e generazione nulla} \rightarrow k \cdot \nabla^2 T = \rho C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{Trattandosi di una lastra} \rightarrow \text{Caso monodirezionale} \rightarrow \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \rightarrow \nabla^2 T(x) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\text{Regime stazionario} \rightarrow \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$\text{Primo integrale} \rightarrow \int \frac{dT}{dx} dx = \frac{dT}{dx} + C_1$$

$$\text{Secondo integrale} \rightarrow \iint \frac{d^2 T}{dx^2} dx^2 = 0 \rightarrow \int \left(\frac{dT}{dx} + C_1 \right) dx = 0 \rightarrow T + C_1 x + C_2 = 0$$

Per comodità si può riformulare l'equazione come segue in quanto C_1 e C_2 sono costanti $\rightarrow T = C_1 x + C_2$

$$\text{Per determinare } C_1 \text{ e } C_2 \text{ si sfruttano le le condizioni di contorno} \rightarrow \begin{aligned} T(x=0) &= T_1 \rightarrow T_1 = 0 + C_2 \rightarrow C_2 = T_1 \\ T(x=L) &= T_2 \rightarrow T_2 = C_1 L + C_2 \rightarrow C_1 = \frac{T_2 - C_2}{L} \rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{aligned}$$

$$T = C_1 x + C_2 \rightarrow \begin{aligned} C_1 &= \frac{T_2 - T_1}{L} \\ C_2 &= T_1 \end{aligned} \rightarrow T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x \rightarrow \text{Questa forma mette in evidenza la pendenza negativa del grafico } T$$

Si evince, inoltre, che il profilo della temperatura è di tipo lineare

$$\text{Legge di Fourier} \rightarrow \dot{q} = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{d}{dx} \left(T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x \right) \rightarrow \dot{q} = k \frac{\Delta T}{L}, \text{ con } \Delta T = T_1 - T_2 = \text{costante} \rightarrow \dot{q} = \text{costante}$$

Lastra con generazione

Si consideri una lastra composta da un unico materiale, e capace di generare potenza termica al suo interno, in regime stazionario.

$$\text{Nel caso con } k \text{ costante} \rightarrow k \cdot \nabla^2 T + \dot{g} = \rho C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{Trattandosi di una lastra} \rightarrow \text{Caso monodirezionale} \rightarrow \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \rightarrow \nabla^2 T(x) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\text{Regime stazionario} \rightarrow \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{g}}{k}$$

$$\text{Primo integrale} \rightarrow \int \frac{dT}{dx} dx = \int -\frac{\dot{g}}{k} dx \rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{g}}{k} x + C_1 \rightarrow \text{Secondo integrale} \rightarrow \int \frac{dT}{dx} = \int -\frac{\dot{g}}{k} x + C_1 \rightarrow T = -\frac{\dot{g} x^2}{2k} + C_1 x + C_2$$

Si evince, inoltre, che il profilo della temperatura è di tipo parabolico, simmetrico, con la concavità verso il basso

$$\text{Per determinare } C_1 \text{ e } C_2 \text{ si sfruttano le le condizioni di contorno (} T_{\text{wall}} \text{ uguali ad entrambe le pareti)} \rightarrow \begin{aligned} T(x=0) &= T_w \rightarrow C_2 = T_w \\ T(x=L) &= T_w \rightarrow C_1 = \frac{\dot{g}}{2k} \cdot L \end{aligned}$$

$$T = -\frac{\dot{g} x^2}{2k} + C_1 x + C_2 \rightarrow \begin{aligned} C_2 &= T_w \\ C_1 &= \frac{\dot{g}}{2k} \end{aligned} \rightarrow T = -\frac{\dot{g} x^2}{2k} + \frac{\dot{g}}{2k} L x + T_w$$

$$\text{Legge di Fourier} \rightarrow \dot{q} = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{d}{dx} \left(-\frac{\dot{g} x^2}{2k} + \frac{\dot{g}}{2k} L x + T_w \right) \rightarrow \dot{q} = -k \left(-\frac{\dot{g}}{k} x + \frac{\dot{g}}{2k} L \right)$$

Il grafico relativo alla temperatura ha una derivata positiva fino alla linea di mezzeria \rightarrow Ciò implica $\dot{q} < 0$ (Verso sx)

In corrispondenza della linea di mezzeria il grafico relativo alla temperatura ha una derivata nulla \rightarrow Ciò implica $\dot{q} = 0$

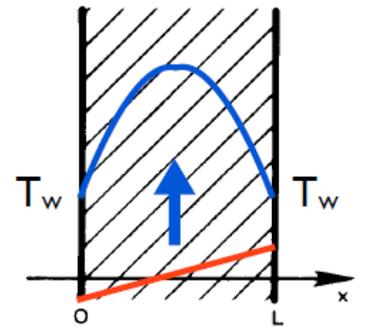
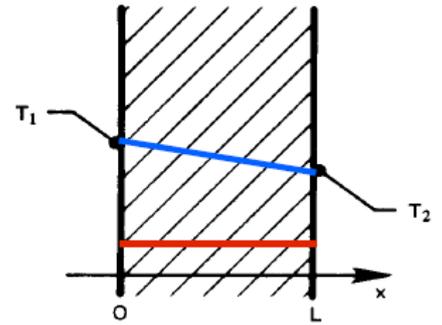
Il grafico relativo alla temperatura ha una derivata negativa fino alla linea di mezzeria \rightarrow Ciò implica $\dot{q} > 0$ (Verso dx)

N.B. In ogni caso il calore tende ad uscire. Verso sinistra, nel dominio di sinistra, e verso destra, nel dominio di destra

$$\text{In alternativa, attraverso il primo integrale, è noto che} \rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{g}}{k} x + C_1 \rightarrow \text{Quindi } \dot{q} = -k \frac{dT}{dx} \rightarrow \dot{q} = -k \left(-\frac{\dot{g}}{k} x + C_1 \right)$$

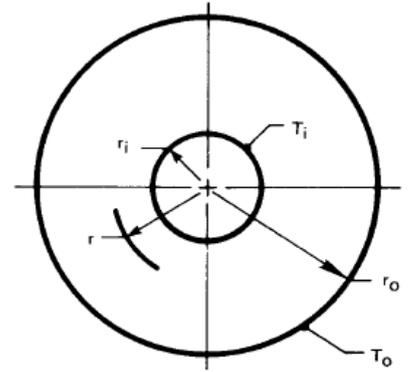
$$\text{Inoltre è noto un caso particolare, tale per cui } \dot{q} = 0 \text{ in corrispondenza della linea di mezzeria} \rightarrow C_1 = \frac{\dot{g}}{2k} \rightarrow \dot{q} = -k \left(-\frac{\dot{g}}{k} x + \frac{\dot{g}}{2k} L \right)$$

N.B. Tali considerazioni valgono solo in condizioni perfettamente simmetriche. Infatti, se $T_{\text{Wall(Sinistra)}} \neq T_{\text{Wall(Destra)}}$, i risultati finali sono diversi e, in particolare, rimane evidente la dipendenza da "k" della potenza termica (\dot{q}).



Cilindro cavo senza generazione

Si consideri un cilindro composto da un unico materiale, ed incapace di generare potenza termica al suo interno, in regime stazionario.



Nel caso con **k costante e generazione nulla** $\rightarrow k \cdot \nabla^2 T + \dot{g} = \rho C \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$
 $\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$

Trattandosi di un cilindro \rightarrow Caso radiale $\rightarrow \nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
 $\rightarrow \nabla^2 T_{(Rad)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$

Regime stazionario $\rightarrow \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\rho C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$

Primo integrale $\rightarrow \int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr = 0 \rightarrow r \left(\frac{dT}{dr} \right) = C_1 \rightarrow$ **Secondo integrale** $\rightarrow dT = C_1 \cdot \frac{dr}{r} \rightarrow \int dT = \int C_1 \cdot \frac{dr}{r} \rightarrow T = C_1 \cdot \ln(r) + C_2$

Dal profilo della temperatura ottenuto si evince che l'andamento non è più lineare

Per determinare C₁ e C₂ si sfruttano le le condizioni di contorno \rightarrow
 $T(r = r_i) = T_i \rightarrow C_1 = \frac{T_i - T_o}{\ln(r_i/r_o)} = - \frac{\Delta T}{\ln(r_o/r_i)}$
 $T(r = r_o) = T_o \rightarrow C_2 = T_i + \frac{\Delta T}{\ln(r_o/r_i)} \cdot \ln(r_i)$

$T = C_1 \cdot \ln(r) + C_2 \rightarrow$
 $C_1 = \frac{T_i - T_o}{\ln(r_i/r_o)} = - \frac{\Delta T}{\ln(r_o/r_i)} \rightarrow \frac{T - T_i}{T_o - T_i} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$
 $C_2 = T_i + \frac{\Delta T}{\ln(r_o/r_i)} \cdot \ln(r_i)$

$\dot{q}_{Radiale} = -k \frac{\partial T}{\partial r} = + \frac{k \Delta T}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \frac{1}{r}$ $\dot{Q} = \dot{q} \cdot A(r) = \frac{k \Delta T}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \frac{1}{r} \cdot 2\pi r l \rightarrow \dot{Q} = \frac{2\pi l \cdot k \Delta T}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \neq f(r)$

In condizioni stazionarie \dot{Q} è costante e non dipende dal raggio $\rightarrow \dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$

Esempi di casi monodimensionali

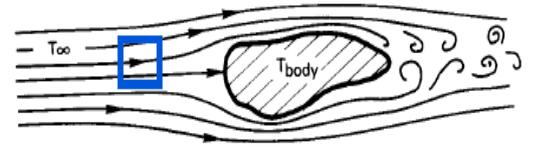
coordinate cartesiane	coordinate cilindriche	coordinate sferiche
$\frac{d^2 T}{dx^2} = - \frac{\dot{g}}{k}$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{\dot{g}}{k}$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{\dot{g}}{k}$
$\frac{dT}{dx} = - \frac{\dot{g}}{k} x + C_1$	$\frac{dT}{dr} = - \frac{\dot{g}}{2k} r + \frac{C_1}{r}$	$\frac{dT}{dr} = - \frac{\dot{g}}{3k} r + \frac{C_1}{r^2}$
$T = - \frac{\dot{g}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$	$T = - \frac{\dot{g}}{4k} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$	$T = - \frac{\dot{g}}{6k} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$

parete piana	cilindro cavo	sfera cava
$\begin{cases} T = C_1 x + C_2 \\ T(x=0) = T_1 \\ T(x=s) = T_2 \end{cases}$	$\begin{cases} T = C_1 \ln(r) + C_2 \\ T(r=R_i) = T_1 \\ T(r=R_e) = T_2 \end{cases}$	$\begin{cases} T = -\frac{C_1}{r} + C_2 \\ T(r=R_i) = T_1 \\ T(r=R_e) = T_2 \end{cases}$
$T = \frac{T_2 - T_1}{s} x + T_1$	$T = \frac{\ln(r/R_i)}{\ln(R_e/R_i)} (T_2 - T_1) + T_1$	$T = \frac{R_i R_e - r}{r R_e - R_i} T_1 + \frac{R_e r - R_1}{r R_e - R_i} T_2$
$\dot{q} = - \frac{T_2 - T_1}{s} \frac{1}{k}$	$\dot{Q} = - \frac{T_2 - T_1}{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi k L}}$	$\dot{Q} = - \frac{T_2 - T_1}{\frac{R_e - R_i}{4\pi k R_i R_e}}$

Lezione del 15 novembre 2021

Convezione

La convezione corrisponde al fenomeno della conduzione nella condizione in cui il fluido è macroscopicamente in moto. Viene riportata una rappresentazione semplificata della convezione, in cui un corpo, avente una temperatura pari a T_{Body} , viene immerso in un fluido avente una temperatura, a distanza sufficientemente elevata, pari a T_{∞} . Logicamente, a distanze ridotte, la temperatura del fluido sarà influenzata dalla presenza del corpo stesso. Si consideri una quantità di fluido in prossimità del corpo, riportata in blu nell'immagine, al fine di studiarne lo scambio termico. Considerando una porzione fissa di volume si ha del fluido in entrata ed in uscita oltre al fenomeno della conduzione, che vale per ogni sostanza: in termini energetici tale condizione è caratteristica dei sistemi aperti, quindi oltre ai termini relativi alla potenza termica in entrata ed in uscita si hanno anche i termini relativi alla variazione di entalpia.



\dot{q}_{in} e \dot{q}_{out} → Derivanti dal fenomeno della conduzione h_{in} e h_{out} → Derivanti dal fluido macroscopicamente in moto

$$\text{Equazione generale della conduzione} \rightarrow k \cdot \nabla^2 T = \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} - \dot{g}$$

$$k \cdot \nabla^2 T \rightarrow \frac{d(\dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out})}{dx} \quad \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} \rightarrow \text{Termine di accumulo} \quad \dot{g} \rightarrow \text{Termine di generazione}$$

Al bilancio energetico appena riportato bisogna aggiungere il termine dovuto alla differenza di entalpia nei flussi entranti ed uscenti

$$\nabla(\rho \cdot \vec{\omega} \cdot h) \rightarrow \text{Termine dovuto alla differenza di entalpia} \rightarrow \text{Unità di misura} = \frac{1}{m} \left(\frac{kg \cdot m \cdot kJ}{m^3 \cdot s \cdot kg} \right) = \frac{kW}{m^3}$$

L'unità di misura del termine legato alla differenza di entalpia è la stessa del termine di accumulo e del termine di generazione

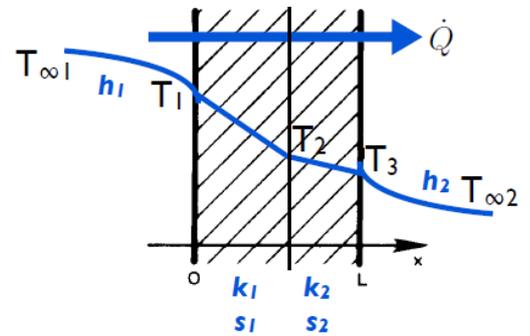
Integrando l'equazione generale della conduzione → Potenza termica scambiata tra il corpo ed il fluido

$$\text{Legge di Newton} \rightarrow \dot{Q} = h \cdot A \cdot (T_s - T_{\infty}) \rightarrow \text{Approccio semplificato}$$

La potenza termica scambiata tra il corpo ed il fluido è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura tra la superficie del corpo e la temperatura del fluido in condizioni indisturbate, alla superficie di scambio termico ed al coefficiente di scambio termico convettivo. Quest'ultimo rappresenta un coefficiente globale che dipende dal fluido e dal moto.

Lastra multistrato con convezione – Caso stazionario con “q” costante in “x” e “t”

In tal caso le condizioni al contorno non sono più rappresentate dalle temperature superficiali T_1 e T_3 ma dalle temperature dell'aria indisturbata prima e dopo la lastra multistrato, ovvero $T_{\infty,1}$ e $T_{\infty,2}$. Questo aspetto, tuttavia, garantisce una maggiore applicabilità a livello pratico: si pensi ai sistemi di riscaldamento domestici che vengono programmati scegliendo la temperatura dell'aria nell'ambiente anziché la temperatura delle pareti.



Vengono trascurate le componenti della potenza termica lungo y e z

Inoltre non vi è alcun tipo di accumulo energetico

N. B. Assunto q = costante si presuppone che non vi sia generazione $\rightarrow q$ costante = generazione nulla

$$\int_0^{s_1} \dot{Q} dx = \int_{T_1}^{T_2} -k_1 \cdot A \cdot dT \rightarrow \dot{Q}(s_1 - 0) = -k_1 \cdot A \cdot (T_2 - T_1) \rightarrow \dot{Q} \cdot s_1 = -k_1 \cdot A \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\int_{s_1}^{s_1+s_2} \dot{Q} dx = \int_{T_2}^{T_3} -k_2 \cdot A \cdot dT \rightarrow \dot{Q}(s_3 - s_2) = -k_2 \cdot A \cdot (T_3 - T_2) \rightarrow \dot{Q} \cdot s_2 = -k_2 \cdot A \cdot (T_3 - T_2)$$

Attraverso la legge di Newton $\rightarrow \dot{Q} = h_1 \cdot A \cdot (T_{\infty,1} - T_1) \rightarrow$ Solitamente le variabili sono rappresentate da \dot{Q}, T_1, T_2 e T_3
 $\dot{Q} = h_2 \cdot A \cdot (T_3 - T_{\infty,2})$

Per risolvere questa tipologia di problemi è necessario fare riferimento al caso parallelo elettrico, dove la potenza termica equivale alla corrente e la differenza di temperatura equivale alla differenza di potenziale.

$$\Delta V = R_{Elettrica} \cdot I \rightarrow \Delta T = R_{Termica} \cdot \dot{Q}$$

Il caso in esame equivale ad un collegamento in serie di quattro resistenze, in particolare la prima e la quarta sono di tipo convettivo mentre la seconda e la terza sono di tipo conduttivo.

$$\dot{Q} \cdot R_{Termica}(Equivalente) = T_{\infty,1} - T_{\infty,2} \rightarrow \dot{Q} \cdot (R_{Conv,1} + R_{Cond,1} + R_{Conv,2} + R_{Cond,2}) = T_{\infty,1} - T_{\infty,2}$$

Ottenuto il valore della resistenza termica equivalente è possibile ottenere la potenza termica in quanto $T_{\infty,1}$ e $T_{\infty,2}$ sono note

$$\begin{aligned} \dot{Q} \cdot s_1 = -k_1 \cdot A \cdot (T_2 - T_1) & \rightarrow \dot{Q} \cdot \left(\frac{s_1}{k_1 \cdot A}\right) = (T_1 - T_2) & R_{Cond,1} = \left(\frac{s_1}{k_1 \cdot A}\right) \\ \dot{Q} \cdot s_2 = -k_2 \cdot A \cdot (T_3 - T_2) & \rightarrow \dot{Q} \cdot \left(\frac{s_2}{k_2 \cdot A}\right) = (T_2 - T_3) & R_{Cond,2} = \left(\frac{s_2}{k_2 \cdot A}\right) \\ \dot{Q} = h_1 \cdot A \cdot (T_{\infty,1} - T_1) & \rightarrow \dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{h_1 \cdot A}\right) = (T_{\infty,1} - T_1) & R_{Conv,1} = \left(\frac{1}{h_1 \cdot A}\right) \\ \dot{Q} = h_2 \cdot A \cdot (T_3 - T_{\infty,2}) & \rightarrow \dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{h_2 \cdot A}\right) = (T_3 - T_{\infty,2}) & R_{Conv,2} = \left(\frac{1}{h_2 \cdot A}\right) \end{aligned}$$

$$\dot{Q} \cdot \left(\frac{s_1}{k_1 \cdot A} + \frac{s_2}{k_2 \cdot A} + \frac{1}{h_1 \cdot A} + \frac{1}{h_2 \cdot A}\right) = T_{\infty,1} - T_{\infty,2}$$

Nel caso in cui fosse necessario calcolare una temperatura intermedia, ad esempio T_2 , si procede come segue.

$$\dot{Q} \cdot (R_{Conv,1} + R_{Cond,1}) = T_{\infty,1} - T_2 \rightarrow T_2 = T_{\infty,1} - \dot{Q} \cdot (R_{Conv,1} + R_{Cond,1})$$

Cilindro multistrato con convezione – Caso stazionario con “q” costante in “r” e “t”

Anche in questo caso vengono trascurate le componenti della potenza termica lungo “r” e “t” ed inoltre non vi è alcun tipo di accumulo energetico. Ne consegue che se la quantità di calore “q” è costante, allora si ha generazione nulla.

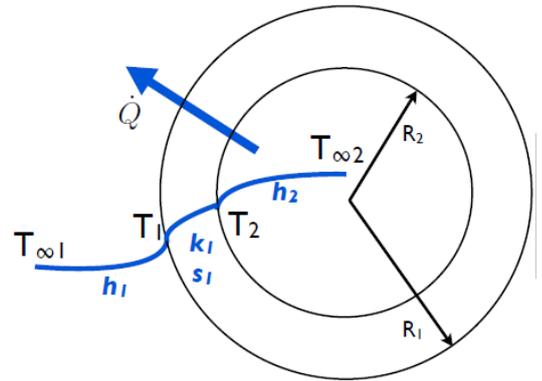
Il fenomeno della conduzione è governato dalla seguente equazione $\rightarrow \dot{Q} = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dr}$

La superficie A è in funzione del raggio, in particolare si ha che $A = 2\pi \cdot r \cdot L$

$$\dot{Q} = -k \cdot 2\pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot L \cdot k} \cdot \frac{dr}{r} = dT \rightarrow \int_{R_2}^{R_1} \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot L \cdot k} \cdot \frac{dr}{r} = \int_{T_2}^{T_1} dT$$

$$\frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot L \cdot k} \cdot \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} = \int_{T_2}^{T_1} dT \rightarrow \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot L \cdot k} \cdot \ln \frac{R_1}{R_2} = T_2 - T_1$$

$$R_{Cond,Cilindro} = \frac{(T_2 - T_1)}{\dot{Q}} = \frac{\ln \frac{R_1}{R_2}}{2\pi \cdot L \cdot k}$$



Il fenomeno della convezione è governato dalle seguenti equazioni \rightarrow

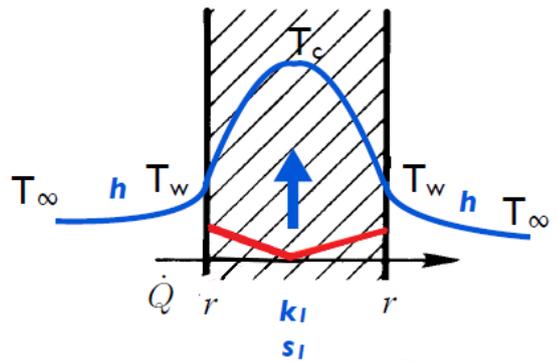
$$R_{Conv,1} = \left(\frac{1}{h_1 \cdot A_1} \right)$$

$$R_{Conv,2} = \left(\frac{1}{h_2 \cdot A_2} \right)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{R_{Conv,1} + R_{Cond,Cilindro} + R_{Conv,2}} \rightarrow \dot{Q} = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{\frac{1}{h_1 \cdot A_1} + \frac{\ln \frac{R_1}{R_2}}{2\pi \cdot L \cdot k} + \frac{1}{h_2 \cdot A_2}}$$

Cilindro con generazione e convezione – Caso stazionario con “q” costante in “t”

Nel caso in esame la quantità di calore è costante nello spazio ma non nel tempo: ciò significa che è impossibile effettuare i calcoli necessari attraverso l'equivalente elettrico. Data una condizione al contorno simmetrica rispetto all'asse del cilindro si ha che il picco di temperatura è sull'asse di simmetria: in corrispondenza di tale punto la potenza termica, logicamente, è nulla. Dalla rappresentazione grafica in esame si evince che la potenza termica cresce all'aumentare del dominio “r” e più ci si avvicina alle pareti del cilindro, maggiore è la potenza termica in uscita.



All'interno della parete \rightarrow Potenza termica trasmessa mediante conduzione $\rightarrow \dot{Q}_{Cond} = \dot{g} \cdot V = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dr}$

All'esterno della parete \rightarrow Potenza termica trasmessa mediante convezione $\rightarrow \dot{Q}_{Conv} = \dot{g} \cdot V = h \cdot A \cdot (T_w - T_{\infty})$

$$\dot{g} \cdot V = h \cdot A \cdot (T_w - T_{\infty}) \rightarrow T_w = T_{\infty} + \frac{\dot{g}}{h} \cdot \frac{V}{A} \rightarrow T_w = T_{\infty} + \frac{\dot{g}}{h} \cdot \frac{V}{A} \rightarrow T_w = T_{\infty} + \frac{\dot{g}}{h} \cdot \frac{\pi R^2 \cdot L}{2\pi R \cdot L} \rightarrow T_w = T_{\infty} + \frac{\dot{g}}{h} \cdot \frac{R}{2} \rightarrow T_w = T_{\infty} + \frac{\dot{g}}{h} \cdot r$$

Per ottenere, invece, la temperatura massima Tc è necessario integrare per parti l'equazione relativa alla trasmissione mediante conduzione, tenendo conto ovviamente della dipendenza da “r” del volume e della superficie.

$$\dot{g} \cdot V = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dr} \rightarrow \dot{g} \cdot \frac{V}{A} = -k \cdot \frac{dT}{dr} \rightarrow \dot{g} \cdot \frac{r_{GENERICO}}{2} = -k \cdot \frac{dT}{dr_{GENERICO}} \rightarrow \int_0^R \frac{\dot{g}}{2} \cdot r_{GENERICO} \cdot dr_{GENERICO} = -k \cdot \int_{T_C}^{T_w} dT$$

$$\frac{\dot{g}}{2} \cdot \frac{R^2}{2} = -k \cdot (T_w - T_C) \rightarrow T_C = T_w + \frac{\dot{g}}{4} \cdot \frac{R^2}{k}$$

N.B. Anche nel caso di un cilindro il profilo della temperatura ha un andamento parabolico e, nello specifico, con la concavità verso il basso.

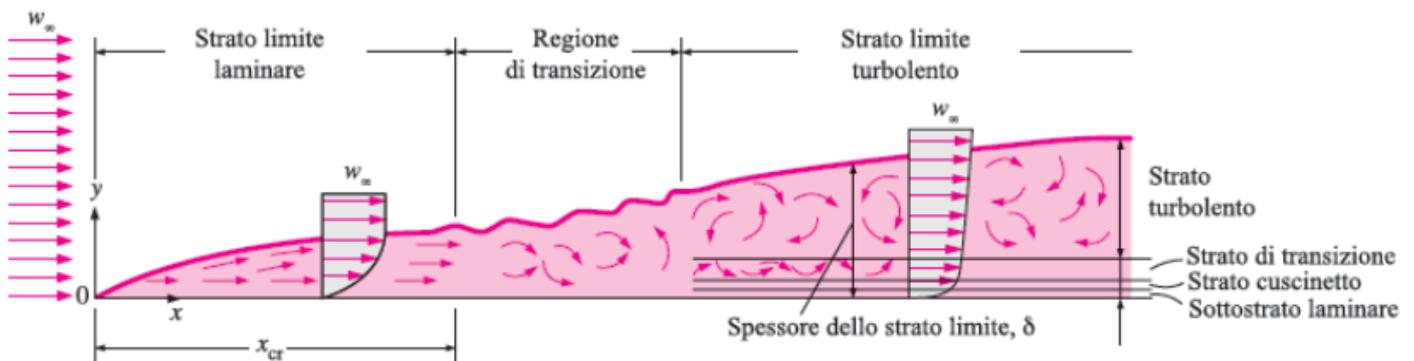
Al fine di poter risolvere questi problemi è necessario considerare la **continuità tra i domini** e la **coerenza tra i flussi di potenza termica**.

Convezione esterna

La convezione esterna è un fenomeno che avviene all'esterno di un corpo. Il caso di riferimento che viene analizzato è quello di una lastra piana investita da un fluido avente un profilo di velocità (w) piatto. In primis è necessario conoscere il campo di moto ed una volta noto è possibile osservare come varia il campo di temperatura. Viene definito "strato limite" una porzione di fluido che viene perturbata dalla presenza del corpo: nell'illustrazione a lato lo strato limite è rappresentato in rosa. Il movimento del fluido procede inalterato, ad una velocità pari a w , fino alla linea rosa, dopodiché esso viene perturbato. Il fluido è perturbato quando la sua velocità è minore o uguale al 99% della velocità in condizioni indisturbate. Ragionamento analogo vale anche per la temperatura: la differenza tra la temperatura del fluido perturbato e la temperatura della lastra deve essere minore o uguale al 99% della differenza di temperatura tra il fluido in condizioni indisturbate e la lastra.

$$\text{Definizione fluido perturbato} \rightarrow \begin{matrix} w \leq 0,99 \cdot w_{\infty} \\ T - T_p \leq 0,99 \cdot (T_{\infty} - T_p) \end{matrix}$$

È possibile suddividere lo strato limite in tre zone: strato limite laminare, regime di transizione e strato limite turbolento.



- **Strato limite laminare**

Nello strato limite laminare il modulo e la direzione della velocità del fluido rimangono pressoché identici rispetto a quelli della velocità iniziale. Nella rappresentazione in esame, ed in regime lineare, il gradiente di velocità in "y" è lineare e la velocità ha solo componente "x". In particolare, in corrispondenza della superficie la velocità è nulla ed aumenta al crescere della distanza tra il fluido e la superficie.

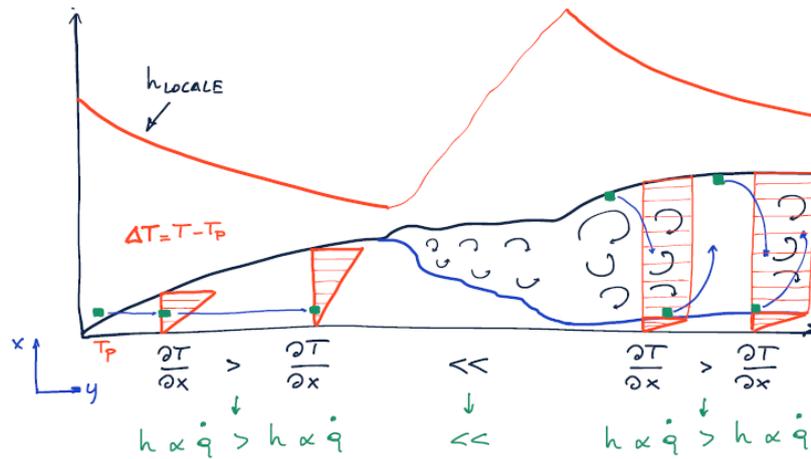
- **Regime di transizione**

Durante il passaggio da strato limite laminare a strato limite turbolento si ha un crollo importante dello spessore relativo al sottostrato laminare.

- **Strato limite turbolento**

Lo strato limite turbolento è caratterizzato da una presenza massiccia di vortici che generano un significativo rimescolamento del fluido. In tal caso la velocità ha tre componenti (x, y, z) ma integrando rispetto ad un arco di tempo sufficientemente lungo si ha che le componenti in "y" e "z" della velocità media risultante si annullano e rimane soltanto la componente principale "x". Anche il gradiente di velocità in "y" è estremamente complesso: in particolare si instaura il sottostrato laminare, ovvero una zona di spessore piuttosto contenuto al cui interno il comportamento del fluido è di tipo laminare. Sperimentalmente si osserva che buona parte del gradiente di velocità si "risolve" all'interno di questo sottostrato.

Profilo di temperatura



Il gradiente di temperatura in "x" moltiplicato per "-k" equivale alla potenza termica che fluisce verticalmente. Il moto del fluido cambia il profilo di velocità ma la conduzione persiste. La potenza termica è direttamente proporzionale al gradiente di temperatura mentre l'ampiezza dello strato limite è inversamente proporzionale al gradiente di temperatura, tanto è vero che inizialmente si ha un elevato gradiente di temperatura ed una ampiezza dello strato limite piuttosto bassa.

$$\dot{q} = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad \dot{q} = h \cdot (T_{\infty} - T_p)$$

Esprimendo il valore della potenza termica scambiata attraverso la legge di Newton si evince che il valore del coefficiente di scambio termico convettivo varia localmente, in modo direttamente proporzionale rispetto alla potenza termica, e dipende fortemente dal moto. L'effetto della variazione del gradiente termico, quindi, viene riprodotto dalla variazione di entalpia locale. Nella parte di strato limite turbolento il gradiente termico è nettamente maggiore rispetto al gradiente dello strato limite laminare e lo stesso vale, logicamente, anche per l'entalpia totale: ne consegue, quindi, che nello strato limite turbolento lo scambio termico è sicuramente più efficace. Nel regime turbolento vi è inoltre un lieve aumento dello spessore del sottostrato laminare ed una conseguente diminuzione del gradiente di temperatura e dell'entalpia.

Regime laminare	Regime di transizione	Regime turbolento
<i>Gradiente termico decrescente</i>	<i>Gradiente termico crescente</i>	<i>Gradiente termico decrescente</i>
<i>Potenza termica scambiata decrescente</i>	<i>Potenza termica scambiata crescente</i>	<i>Potenza termica scambiata decrescente</i>
<i>Entalpia locale decrescente</i>	<i>Entalpia locale crescente</i>	<i>Entalpia locale decrescente</i>

N.B. Ogni considerazione in merito al gradiente di temperatura si riferisce al modulo di quest'ultimo in quanto la lastra potrebbe essere più calda del fluido o viceversa.

Lezione del 18 novembre 2021

Analisi dimensionale

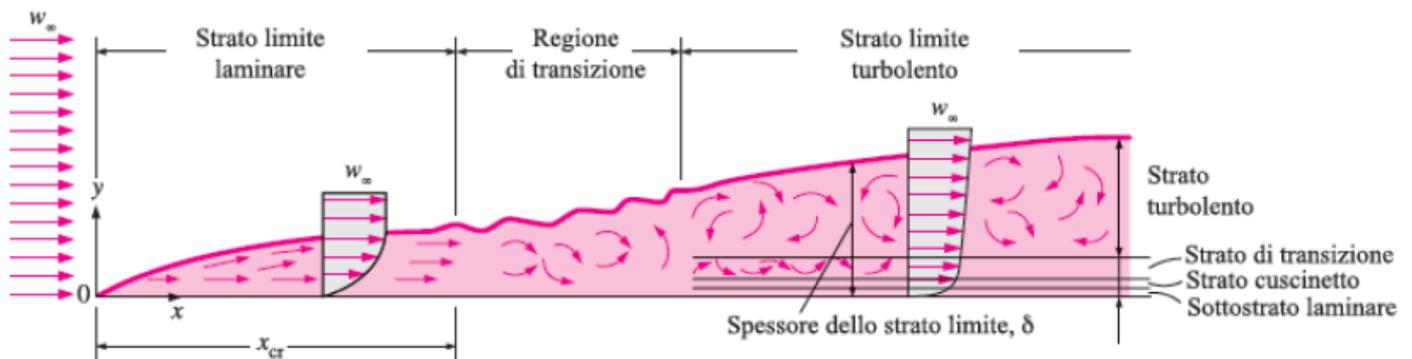
Lo strato limite di velocità e lo strato limite di temperatura hanno una fenomenologia analoga: ciò è dimostrato anche dalle leggi che governano i fenomeni di trasporto di energia ed i fenomeni di trasporto della quantità di moto, oltre che i fenomeni di trasferimento della materia.

$$\text{Energia} \rightarrow \dot{q} = -\frac{k}{\rho C} \cdot \frac{d(\rho C T)}{dx} \quad \text{Materia} \rightarrow \dot{N} = -D \cdot \frac{d(C)}{dx} \quad \text{Quantità di moto} \rightarrow \tau = -\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{d(\rho \omega_y)}{dx}$$

Uno dei fattori che caratterizza lo strato limite è sicuramente la velocità (w) a cui si muove il fluido verso il corpo. Vi è, inoltre, una stretta correlazione tra lo strato limite, e quindi il valore di entalpia, la geometria e la lunghezza del corpo. Per corpi sufficientemente corti, ad esempio, lo strato limite è solamente di tipo laminare, inoltre è possibile affermare che lo strato lineare dipende dalla forma del corpo colpito dal fluido. Ci sono, poi, alcune grandezze relative ai fluidi che influenzano lo strato limite come il calore specifico, la conducibilità (che appare anche nella legge di Fourier), la densità e la viscosità dinamica.

N.B. Alcuni degli aspetti appena riportati hanno delle ripercussioni sullo strato limite di temperatura, mentre altri hanno ripercussioni sullo strato limite di velocità. Tuttavia lo strato limite di velocità e quello di temperatura sono strettamente correlati tra loro e di conseguenza tutti i fattori sopraelencati possono influenzare entrambi gli strati limite. Ciò significa che il valore dell'entalpia è influenzato sia da fattori termodinamici che da fattori di tipo fisico-geometrico.

Teorema di Buckingham



Affinchè sia possibile sviluppare un metodo di stima efficace, in grado di contemplare un numero esteso di casi di interesse ingegneristico, si utilizza uno strumento matematico, ovvero il teorema di Buckingham. In particolare, attraverso una serie di passaggi matematici, è possibile adimensionalizzare le 6 grandezze iniziali rispetto a 4 di esse ed infine ottenere una funzione in 2 variabili riconducibili alle 6 di partenza.

$$h = h(\rho, \mu, k, C, D, \omega, \text{Geometria}) \rightarrow \text{Fissata la geometria, adimensionalizzo in funzione di } \mu, k, D, \omega \rightarrow Nu = f(Re, Pr)$$

ρ, μ, k, C sono grandezze relative al fluido

C viene trasformato in Pr , mentre ρ in Re

Vengono creati dei **gruppi adimensionali** che contengono informazioni relative a più di una variabile originale

Gruppi adimensionali

- **Nusselt**

Il gruppo adimensionale "Nusselt" comprende tutte le grandezze necessarie per lo studio dello strato limite, ovvero l'entalpia, la lunghezza e la conducibilità termica del materiale. A sua volta Nusselt è funzione di due gruppi adimensionali: **Reynolds (Re)** e **Prandtl (Pr)**.

$$Nu = \frac{h \cdot D}{k} \rightarrow \text{Anche in questo caso } h \text{ e } k \text{ si riferiscono al fluido} \rightarrow [Nu] = \frac{\left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \cdot [m]}{\left[\frac{W}{m \cdot K} \right]} = \text{Adimensionale}$$

$$Nu = \frac{h \cdot D}{k} = \frac{h}{k} \cdot \frac{\Delta T}{D} \rightarrow Nu = \frac{\text{Potenza scambiata per convezione}}{\text{Potenza scambiata per conduzione}}$$

→ **Quanto prevale la convezione sulla conduzione nel caso in esame**

Se Nusselt è un **valore alto** → **Effetto della convezione prevalente**

Se Nusselt è un **valore basso** → **Effetto della conduzione prevalente**

$Nu \geq 1$ → Se $Nu = 1$ vi è solo conduzione

- **Reynolds**

Per attribuire un significato fisico al gruppo adimensionale "Reynolds" è necessario considerare la definizione di quantità di moto.

$$Re = \frac{\rho \cdot \omega \cdot L}{\mu} \rightarrow Re = \frac{\rho \cdot \omega \cdot L^2 \cdot \omega}{\mu \cdot \frac{\omega}{L} \cdot L^2}$$

$$\tau = -\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{d(\rho \omega_y)}{dx} \rightarrow \text{Ipotezzando una variazione irrilevante di } \rho \rightarrow \tau = -\mu \cdot \frac{d(\omega_y)}{dx} \rightarrow \tau \text{ è uno sforzo}$$

$$\text{Sforzo} \times \text{Superficie} = \text{Forza} \rightarrow \mu \cdot \frac{\omega}{L} \cdot L^2 = \text{Forza viscosa}$$

All'interno di un fluido il trasferimento della quantità di moto avviene mediante le interazioni tra i volumi infinitesimi di fluido. Si consideri, ad esempio, lo strato limite di velocità sopraelevato: in corrispondenza della superficie della lastra la velocità del fluido è nulla in quanto viene frenato per attrito dal corpo e, conseguentemente, il volume infinitesimo avente velocità nulla bloccherà a sua volta porzioni infinitesime di fluido che scorrono accanto ad esso. Tali forze di attrito all'interno del fluido sono determinate da una sua proprietà caratteristica, ovvero la viscosità. Dunque la variazione in "x" della velocità del fluido (w_y) è dovuta dalla presenza di queste particolari forze di attrito interne al fluido.

Per esprimere il denominatore in funzione della quantità di moto bisogna moltiplicare per $\frac{\omega}{L} \cdot L^2$

Si moltiplica anche il numeratore per $\frac{\omega}{L} \cdot L^2 \rightarrow \rho \cdot \omega \cdot L^2 \cdot \omega \rightarrow \rho \cdot \omega \cdot L^2$ è una **portata massica**

Portata massica × Velocità = Forza → $\rho \cdot \omega \cdot L^2 \cdot \omega = \text{Forza dinamica}$

La forza dinamica dipende esclusivamente dalla velocità del fluido ed è generata dalle accelerazioni all'interno del fluido.

Se Reynolds è un **valore alto** → **Effetto delle forze viscosive prevalente** → **Regime laminare**

Se Reynolds è un **valore basso** → **Effetto delle forze dinamiche prevalente** → **Regime turbolento**

N.B. I valori Reynolds critici sono ottenuti sperimentalmente e sono fortemente dipendenti dalla geometria del corpo a contatto con il fluido.

- **Prandtl**

Esso è il parametro che confronta lo strato limite di velocità con quello di temperatura e viene definito come segue.

$$Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{k}$$

Per comprendere il significato fisico del gruppo adimensionale Prandtl è necessario riformulare la precedente equazione

$$Pr = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{C_p \cdot \rho}} = \frac{\text{Diffusività della Quantità di moto}}{\text{Diffusività dell'Energia}} = \frac{\delta}{\delta_t}$$

$$\dot{q} = -\frac{k}{\rho C} \cdot \frac{d(\rho CT)}{dx} \rightarrow \text{Con } C \text{ e } \rho \text{ costanti} = \text{Legge di Fourier} \rightarrow \dot{q} = -k \cdot \frac{d(T)}{dx}$$

$$\text{Legge trasferimento quantità di moto} \rightarrow \tau = -\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{d(\rho w_y)}{dx}$$

Attraverso le relazioni sopraelencate, il gruppo adimensionale "Prandtl" permette di effettuare un confronto tra il fenomeno del trasferimento della quantità di moto ed il fenomeno del trasferimento dell'energia.

$$\dot{q} = -\frac{k}{\rho C} \cdot \frac{d(\rho CT)}{dx} \rightarrow -\frac{\dot{q}}{\frac{d(\rho CT)}{dx}} = \frac{k}{\rho C} \rightarrow \text{Per convenzione si utilizza } C_p \rightarrow \frac{k}{\rho C_p} = -\frac{\dot{q}}{\frac{d(\rho CT)}{dx}}$$

$$\tau = -\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{d(\rho w_y)}{dx} \rightarrow \frac{\mu}{\rho} = -\frac{\tau}{\frac{d(\rho w_y)}{dx}}$$

$$Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{k} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{C_p \cdot \rho}} \rightarrow Pr = \frac{\frac{\tau}{\frac{d(\rho w_y)}{dx}}}{\frac{\dot{q}}{\frac{d(\rho CT)}{dx}}}$$

Confronta lo **sforzamento** a fronte di un gradiente di quantità di moto ed il **flusso termico** a fronte di un gradiente di temperatura

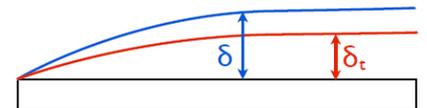
Se Prandtl è un **valore alto** → **Effetto della diffusione della quantità di moto prevalente**

Se Prandtl è un **valore basso** → **Effetto della diffusione dell'energia prevalente**

Il valore del gruppo adimensionale Prandtl influenza lo spessore dello strato limite di velocità e di temperatura

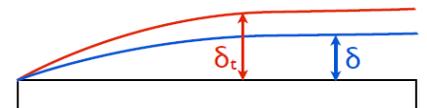
Se Prandtl è un **valore alto** (Es. Olii)

- Effetto della diffusione della quantità di moto prevalente
- **Spessore strato limite di velocità elevato**



Se Prandtl è un **valore basso** (Es. Metalli liquidi)

- Effetto della diffusione dell'energia prevalente
- **Spessore strato limite di temperatura elevato**



Aumentando la **viscosità** cresce lo spessore dello strato limite di velocità perché **si diffonde maggiormente la perturbazione**. Ciò comporta che un fluido molto viscoso consente una elevata propagazione ad una piccola perturbazione. Aumentando la **conducibilità**, invece, cresce lo spessore dello strato limite di temperatura in quanto **si diffonde maggiormente il flusso energetico**.

Legame tra Prandtl e Reynolds → **Prandtl fornisce il rapporto tra i due strati limite**
Reynolds fornisce informazioni relative allo **strato limite di velocità**

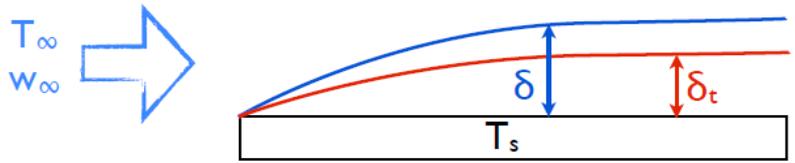
Sfruttando Prandtl e Reynolds si possono ottenere informazioni relative allo **strato limite di temperatura**

Correlazioni semi-empiriche

Per ogni geometria vi sono delle correlazioni aventi la seguente forma: $Nu = C_1 \cdot Re^{C_2} \cdot Pr^{C_3}$.

Lastra piana

Dato un fluido in condizioni indisturbate che investe una lastra piana con una velocità tangenziale all'asse della lastra si hanno due strati limite, uno di velocità ed uno di temperatura, parzialmente sovrapposti. Vi sono due possibili correlazioni, dedotte ovviamente attraverso osservazioni di tipo sperimentali: una per la condizione laminare e una per la condizione turbolenta



$$Nu = 0,664 \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \rightarrow \text{Laminare con } Re_{cr} < 500000$$

$$Nu = 0,037 \cdot Re^{\frac{4}{5}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \rightarrow \text{Turbolento con } Re_{cr} > 500000$$

Tuttavia il gruppo adimensionale Reynolds comprende anche i termini “ ρ ” e “ μ ”, i quali variano in base alla temperatura: per convenzione viene scelta come temperatura di riferimento la T_{film} .

$$T_{film} = \frac{T_{Superficiale(Corpo)} + T_{\infty}(Fluido)}{2}$$

• Calcolo di Nusselt ed h

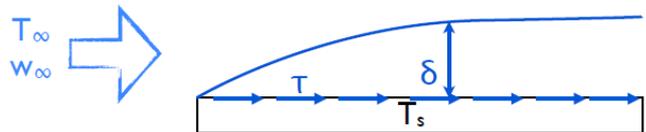
1. Calcolare la T_{film} ;
2. Nota T_{film} si ottiene il relativo gruppo adimensionale Reynolds;
3. Noto il valore Reynolds è possibile stabilire se la condizione in esame è di tipo turbolento o laminare;
4. Viene scelta la correlazione corretta in base alla condizione in esame e si introducono i valori Reynolds e Prandtl per ottenere Nusselt;
5. Noto Nusselt è possibile calcolare il valore di entalpia noto che $Nu = \frac{h \cdot L}{k}$, dove “k” è in funzione della temperatura.

• Calcolo della forza di attrito

1. Viene esercitato uno sforzo ($\tau = -\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{d(\rho w_y)}{dx}$) sulla lastra da parte del fluido che genera una forza di attrito, o drag;
2. Anziché integrare l'equazione relativa agli sforzi vista in precedenza ($\tau = -\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{d(\rho w_y)}{dx}$) è più semplice integrare un'espressione alternativa ($\tau = C_f \cdot \rho \cdot \frac{\omega_{\infty}^2}{2}$) in funzione della velocità del fluido indisturbato anziché del gradiente di velocità;
3. Il coefficiente di attrito (C_f) deve essere calcolato sperimentalmente e vi possono essere due tipi di correlazioni: in regime laminare, ovvero con $Re_{cr} < 500000$, ed in regime turbolento, ovvero con $Re_{cr} > 500000$;

$$C_f = \frac{1,328}{Re^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \text{Laminare con } Re_{cr} < 500000$$

$$C_f = \frac{0,074}{Re^{\frac{1}{5}}} \rightarrow \text{Turbolento con } Re_{cr} > 500000$$

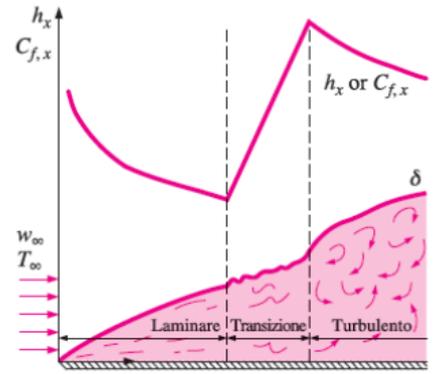


$$\text{Noto che Forza} = \text{Sforzo} \times \text{Superficie} \rightarrow F_{drag} = C_f \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{\omega_{\infty}^2}{2}$$

- **Coefficiente di attrito (C_f) ed entalpia (h) locale**

Fino ad ora è stato calcolato il valore di h rappresentativo di tutto lo scambio termico sul corpo ed il ragionamento analogo vale anche per il valore del coefficiente di attrito (C_f) del corpo. Tuttavia esistono delle correlazioni che permettono di ottenere il valore di entalpia locale, ovvero un dato specifico e non più un valore medio. Si ipotizzi di voler calcolare il valore di entalpia locale, in corrispondenza di un punto generico "x", nel caso di una lastra su cui agisce un fluido in regime laminare.

N.B. Rispetto al Nusselt riportato per lo studio di una lastra avente lunghezza pari ad L cambia solo il coefficiente moltiplicativo.



Regime laminare

$$Nu = \frac{h \cdot x}{k} = 0,332 \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \rightarrow Nu \propto Re^{\frac{1}{2}} \rightarrow Con Re = \frac{\rho \omega x}{\mu} \rightarrow Nu \propto \left(\frac{\rho \omega x}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{h \cdot x}{k} \propto \left(\frac{\rho \omega x}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow Si\ possono\ elidere\ le\ costanti \rightarrow h \propto \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$C_f = \frac{0,664}{Re^{\frac{1}{2}}} \rightarrow Con Re = \frac{\rho \omega x}{\mu} \rightarrow C_f = \frac{0,664}{\left(\frac{\rho \omega x}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow Si\ possono\ elidere\ le\ costanti \rightarrow C_f \propto \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Si evince che **h e C_f hanno lo stesso andamento in x**

→ Ciò conferma una **forte analogia tra il coefficiente di attrito e lo scambio termico convettivo**

In particolare, un **elevato scambio di calore comporta un attrito elevato e quindi una perdita di carico**

Regime turbolento

$$Nu = \frac{h \cdot x}{k} = 0,0296 \cdot Re^{\frac{4}{5}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \rightarrow Nu \propto Re^{\frac{4}{5}} \rightarrow Con Re = \frac{\rho \omega x}{\mu} \rightarrow Nu \propto \left(\frac{\rho \omega x}{\mu}\right)^{\frac{4}{5}} \rightarrow \frac{h \cdot x}{k} \propto \left(\frac{\rho \omega x}{\mu}\right)^{\frac{4}{5}} \rightarrow Si\ possono\ elidere\ le\ costanti \rightarrow h \propto \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$$

$$C_f = \frac{0,0592}{Re^{\frac{1}{5}}} \rightarrow Con Re = \frac{\rho \omega x}{\mu} \rightarrow C_f = \frac{0,0592}{\left(\frac{\rho \omega x}{\mu}\right)^{\frac{1}{5}}} \rightarrow Si\ possono\ elidere\ le\ costanti \rightarrow C_f \propto \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$$

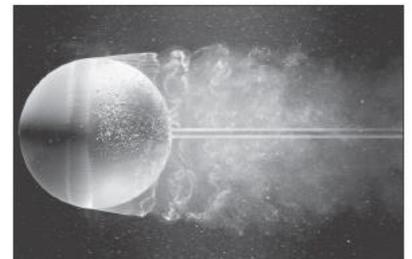
Regime turbolento – Regime laminare

È difficile, tramite una semplice osservazione, stabilire se un fenomeno avviene in regime turbolento piuttosto che in regime laminare. Tuttavia, a differenza della prima sfera, la seconda è seguita da vortici di dimensioni molto piccoli e ciò rappresenta un chiaro segno di regime turbolento. Nelle correlazioni in tabella, solitamente, non si parla di regime turbolento o regime laminare ma vengono distinti semplicemente i campi di Reynolds. La turbolenza è un fenomeno non indotto puramente dalla geometria e dalle dimensioni del corpo, bensì dalla velocità: infatti per valori di ω sufficientemente bassi non si hanno effetti nell'immediato. Tuttavia, fissata una velocità ω , vi è una naturale evoluzione dello strato limite e quindi il passaggio da un regime di tipo laminare ad uno di tipo turbolento.

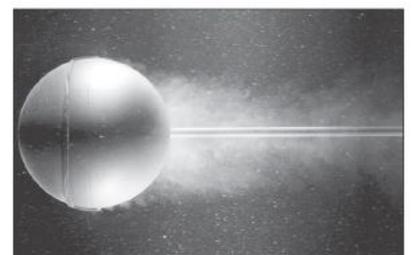
Sfera e Cilindro

Nel caso delle due sfere in esame, gli emisferi affacciati verso il fluido in moto non presenteranno mai delle turbolenze. Invece, a causa delle variazioni con cui la velocità del fluido incide sul corpo, le zone posteriori presenteranno dei vortici: alcuni di essi, in realtà, sono dei semplici **distacchi di vena**. In tali casi la geometria del corpo induce dei ricircoli che non sono, però, fenomeni legati ad una turbolenza vera e propria. Invece, quando vi sono dei vortici di piccole dimensioni, si è certi del regime turbolento: anche per dimensioni ridotte prevale una forza dinamica di rimescolamento piuttosto che una forza viscosa che riordina il fluido. Nel caso della prima sfera, infatti, si nota che dopo una prima fase di rimescolamento le forze viscose riescono a prevalere mentre nel caso della seconda sfera l'effetto scia è molto più intenso e duraturo.

Nel grafico riportato di seguito è stato riportato Nusselt in funzione dell'angolazione dal punto di ristagno: si nota che al crescere di Reynolds aumenta anche Nusselt, come già dimostrato precedentemente. Tale grafico, inoltre, fornisce un andamento puramente qualitativo relativo al valore dell'entalpia. Nelle zone intorno a 0° e 160° il valore di Nusselt è molto simile, mentre ad un'ampiezza di circa 90° si ha una variazione piuttosto importante: in particolare si ha prima un picco negativo (circa 80°) e subito dopo un picco positivo (circa 100°). Questa variazione è dovuta alla naturale tendenza del fluido, tra gli 80° ed i 90°, a scorrere tangenzialmente rispetto alla superficie del corpo, riducendo così lo scambio termico. Invece, per angolazioni immediatamente successive, si ha l'effetto opposto, ovvero uno scambio termico più efficace. Per Reynolds bassi, la differenza tra il picco negativo e quello positivo resta comunque contenuta, invece per Reynolds sempre maggiori l'ampiezza tra massimo e minimo cresce. L'elevata capacità di scambio termico in corrispondenza di determinate angolazioni è dovuta da un effetto significativo della turbolenza, prima attraverso i distacchi di vena e poi attraverso i vortici.



(a)



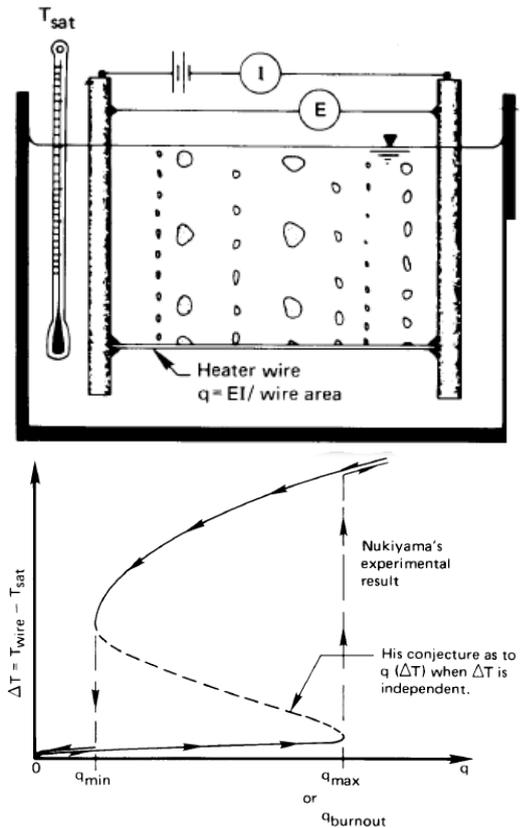
(b)

Convezione esterna con transizione di fase

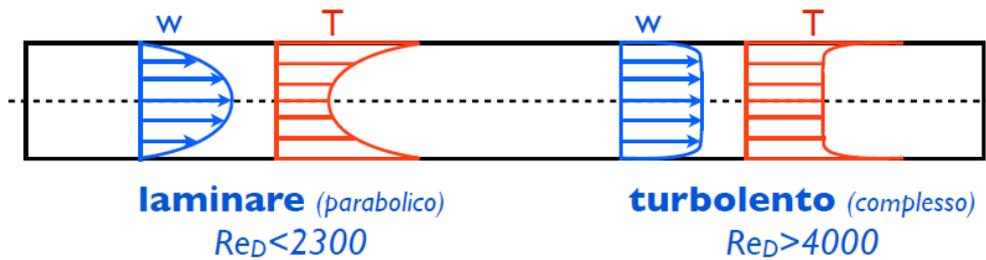
Un caso particolare di convezione esterna si ha in corrispondenza di una transizione di fase, durante la quale è possibile trasferire calore a temperatura costante. Ciò può creare dei dubbi circa la validità della legge di Fourier, in quanto la differenza di temperatura è pressoché nulla.

$$\text{Legge di Newton} \rightarrow \dot{q} = h \cdot (T_s - T_f) \rightarrow \begin{matrix} \Delta T \text{ piccolo} \\ h \text{ molto elevato} \end{matrix}$$

Tuttavia lo scambio termico in corrispondenza di una transizione di fase è molto elevato nonostante un ridotto ΔT e ne consegue, quindi, che in tali condizioni l'entalpia ha valori molto alti. Un esperimento molto interessante rispetto al fenomeno in esame è l'esperimento di Nukiyama. In un primo momento è possibile fornire una potenza termica elevata, mantenendo un ΔT basso, mediante il cavo elettrico immerso nell'acqua, dopodiché emerge, improvvisamente, un'importante differenza di temperatura: quest'ultimo fenomeno è chiamato "burnout". Aumentando la potenza termica del cavo si crea una certa continuità tra le bolle d'acqua al punto da generare un cilindro gassoso che ricopre completamente il cavo. Così facendo lo scambio termico tra cavo e vapore, che avviene per conduzione, richiede un gradiente termico importante a causa della scarsa conducibilità del vapore.



Convezione interna



$$Re_D = \frac{\rho \cdot \omega_{Media} \cdot D}{\mu} \rightarrow \text{Il profilo di velocità non dipende dalla lunghezza del tubo ma dal diametro} \rightarrow \begin{matrix} Re_D < 2300 \rightarrow \text{Laminare} \\ Re_D > 4000 \rightarrow \text{Turbolento} \end{matrix}$$

Nel **regime laminare** prevalgono le forze viscosi, quindi la componente di velocità è praticamente pari a quella originaria, ovvero prima dell'ingresso del fluido all'interno del tubo. Immaginando che il fluido abbia un profilo di velocità piatto all'esterno del tubo, all'interno del tubo la componente di velocità viene conservata ma in termini quantitativi si ha una variazione del profilo: in particolare, in corrispondenza dell'asse si ha la velocità massima, mentre in prossimità delle pareti del tubo la velocità assume valori prossimi allo zero: il profilo, quindi, è parabolico. Ipotizzando che la temperatura superficiale del tubo sia maggiore rispetto alla temperatura del fluido si ha, anche in questo caso, un profilo di temperatura di tipo parabolico avente però la concavità opposta rispetto al profilo di velocità. Viceversa, ipotizzando che la temperatura del fluido sia maggiore rispetto a quella del tubo, si ha un profilo di temperatura di tipo parabolico avente concavità concorde rispetto al profilo di velocità. Si nota quindi una certa analogia tra i due profili.

Nel **regime turbolento** prevalgono le forze dinamiche di rimescolamento e ne consegue una velocità media (ω) più alta rispetto al regime laminare. Ciò lo si evince anche dalla definizione di Re_D , infatti a parità di diametro, densità e viscosità dinamica la differenza è determinata dal valore della velocità media. Se ci fosse la possibilità di seguire i movimenti delle singole porzioni di fluido si noterebbe che, in regime turbolento, vi sono dei vortici e quindi il movimento avviene in tre direzioni. Tuttavia, integrando per un tempo sufficientemente lungo la velocità di un volume infinitesimo di fluido, si ha che le componenti (y,z) si compensano reciprocamente ed il moto risultante è esclusivamente in direzione "x". Ne segue che il profilo di velocità, a causa di un rimescolamento significativo determinato dai vortici, è sostanzialmente piatto per la maggior parte del dominio. Si nota, invece, un gradiente di velocità importante in corrispondenza della superficie del tubo. Ipotizzando che la temperatura superficiale del tubo sia maggiore rispetto alla temperatura del fluido si ha, anche in questo caso, un profilo di temperatura complesso, prevalentemente piatto, avente però la concavità opposta rispetto al profilo di velocità. Viceversa, ipotizzando che la temperatura del fluido sia maggiore rispetto a quella del tubo, si ha un profilo di temperatura avente concavità concorde rispetto al profilo di velocità. Anche in questo caso si nota una certa analogia tra i due profili ma in questo caso in particolare, ovvero in regime turbolento, si evince un elevatissimo gradiente termico a cui corrisponde, logicamente, uno scambio termico efficace.

$$\text{La legge di Newton rimane valida} \rightarrow \dot{q} = h \cdot (T_s - T_f) \rightarrow \begin{matrix} T_s(x) = \text{Temperatura superficiale del tubo} \\ T_f(x) = \text{Temperatura media del fluido} \end{matrix}$$

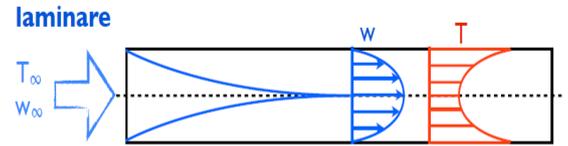
La temperatura media del fluido corrisponde alla temperatura di mescolamento adiabatico, ovvero bisogna estrarre un "dischetto" di fluido dal tubo, inserirlo in un serbatoio adiabatico vuoto ed attendere che esso raggiunga la temperatura di equilibrio, che corrisponde alla temperatura media del fluido.

N.B. $T_s(x)$ e $T_f(x)$ sono in funzione della coordinata x

Sviluppo dei profili

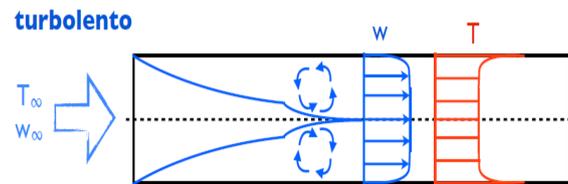
- **Regime laminare**

Al fine di comprendere perché il regime di moto è determinato dal diametro e non dalla lunghezza è necessario studiare la zona di sviluppo. All'inizio del tubo, infatti, il profilo di velocità non è definito ed è in una fase di sviluppo. Si ipotizzi di avere all'ingresso un profilo di temperatura e di velocità piatto: quest'ultimo assume nel tempo l'andamento dello strato limite, simile a quanto osservato nel caso della lastra piana. Le due porzioni di dominio adiacenti alla superficie del tubo presentano una velocità alterata del fluido, mentre nella porzione centrale il fluido procede in maniera indisturbata e la velocità media rimane inalterata. Procedendo lungo il tubo lo spessore dello strato limite aumenta fino ad occupare tutto il dominio: ciò significa che il fluido è completamente perturbato. A seguire vi è una zona del fluido in cui il suo profilo di velocità è **"fully developed"**, ovvero si stabilizza ed assume un andamento parabolico. Lo stesso vale analogamente per il profilo di temperatura.



- **Regime turbolento**

Si ipotizzi di avere all'ingresso un profilo di temperatura e di velocità identico al precedente ed un tubo avente diametro maggiore. Come nel caso precedente, all'inizio, vi è lo sviluppo dello strato limite. Tuttavia in questo caso la zona indisturbata collapsa quando viene raggiunto l'instaurarsi della turbolenza. Nel caso precedente il moto indisturbato scompariva quando il fluido era ancora in regime laminare, invece in questo caso, oltre a necessitare una quantità di tempo maggiore affinché la zona indisturbata collapsi, vi è la formazione di vortici che conserveranno un determinato andamento nel tempo. Come già notato in precedenza, più sottile è lo strato limite, maggiore è il gradiente termico e quindi la potenza termica scambiata. La zona di sviluppo, siccome presenta uno strato limite contenuto, è caratterizzata da uno scambio di potenza termica che potrebbe variare, e non di poco, lo scambio energetico complessivo. Nel caso in cui la lunghezza del tubo fosse nettamente superiore rispetto alla lunghezza della zona di sviluppo, allora tale scambio termico sarebbe poco significativo. Viceversa, nel caso in cui la lunghezza del tubo fosse comparabile alla lunghezza della zona di sviluppo, il relativo scambio termico non potrebbe essere ignorato.



- **Lunghezza per il completo sviluppo dei profili di velocità e temperatura**

Regime Laminare	
$L_{\omega} = 0,05 \cdot Re \cdot D \approx (50 - 100) \cdot D$	$L_T = 0,05 \cdot Re \cdot Pr \cdot D \approx (350 - 700) \cdot D$
Regime Turbolento	
$L_{\omega} = 10 \cdot D$	$L_T = 10 \cdot D$

N.B. È molto importante valutare la fase di sviluppo al fine di ottenere un valore realistico circa lo scambio termico complessivo.

Caso limite n°1 – Flusso termico costante

In questa situazione particolare, ammesso che la potenza termica sia effettivamente entrante, sia la temperatura del fluido che del tubo subiranno un aumento lineare rispetto ad "x" tale per cui la differenza di temperatura tra T_s e T_f rimane costante su tutto il tubo.

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot A$$

$$A = \pi D \cdot L = \text{Superficie di contatto tra fluido e tubo}$$

Nota T_i è possibile calcolare T_u attraverso un **bilancio energetico**

Ipotizzando che $P = \text{Costante}$

$$\text{Sia per Gas Ideale che per liquido} \rightarrow \dot{Q} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_u - T_i)$$

Per conoscere T_s del tubo è necessario utilizzare la **legge di Newton**

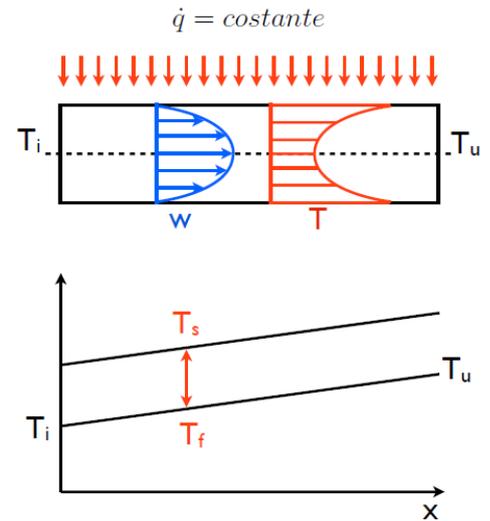
$$\dot{q} = h \cdot (T_s - T_f)$$

Noto che \dot{q} ed h sono costanti $\rightarrow T_s - T_f = \text{Costante}$

Ciò lo si evince anche dal bilancio energetico per un qualsiasi punto x

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot \pi D \cdot x = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_f(x) - T_i)$$

$$\frac{\dot{q} \cdot \pi D}{\dot{m} \cdot C_p} \cdot x = T_f(x) - T_i \rightarrow T_f(x) = T_i + \frac{\dot{q} \cdot \pi D}{\dot{m} \cdot C_p} \cdot x \rightarrow T_f(x) = T_i + C_1 \cdot x \rightarrow \text{Andamento lineare di } T_f(x)$$



Caso limite n°2 – Temperatura superficiale costante

In questo caso particolare, assumendo che la temperatura del tubo sia maggiore rispetto a quella del fluido, il profilo di temperatura del fluido è di tipo logaritmico e quindi la temperatura del fluido può solo tendere alla temperatura superficiale del tubo.

$$T_s = \text{Costante}$$

Considero una porzione di fluido generica che interagisce con una superficie $dA = \pi \cdot D \cdot dx$

Potenza termica scambiata dal fluido = Potenza termica scambiata dal tubo

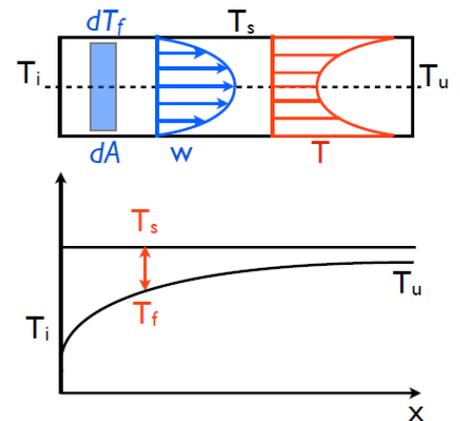
$$\dot{m} \cdot C_p \cdot dT_f = h \cdot (T_s - T_f) \cdot dA$$

$$\text{Con } dT_f = -d(T_s - T_f) \rightarrow \frac{d(T_s - T_f)}{T_s - T_f} = -\frac{h}{\dot{m} \cdot C_p} \cdot dA$$

$$\text{Integrando lungo tutto il tubo} \rightarrow \int_{T_s - T_i}^{T_s - T_u} \frac{d(T_s - T_f)}{T_s - T_f} = -\int_0^A \frac{h}{\dot{m} \cdot C_p} \cdot dA \rightarrow \ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i} = -\frac{h \cdot A}{\dot{m} \cdot C_p}$$

$$\text{Siccome per il bilancio energetico} \rightarrow \dot{Q} = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_u - T_i) \rightarrow \text{Con } \dot{m} \cdot C_p = -\frac{h \cdot A}{\ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}} \rightarrow \dot{Q} = -h \cdot A \cdot \frac{(T_u - T_i)}{\ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}}$$

$$\text{Con } \Delta T_i = T_s - T_i \text{ e } \Delta T_u = T_s - T_u \rightarrow \dot{Q} = h \cdot A \cdot \frac{\Delta T_i - \Delta T_u}{\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_u}} = h \cdot A \cdot \Delta T_{ml}$$



N.B. Le considerazioni relative ai due casi appena analizzati valgono indistintamente sia per il regime laminare, sia per quello turbolento.

Calcolo di "h"

Regime Laminare $\rightarrow Re_D = \frac{\rho \omega D}{\mu} < 2300$

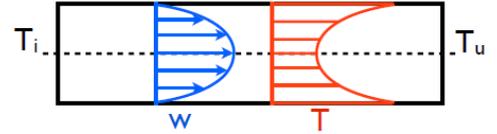
$T_s = \text{Costante} \rightarrow Nu = \frac{h \cdot D}{k} = 3,66$

$q = \text{Costante} \rightarrow Nu = \frac{h \cdot D}{k} = 4,36$

N.B. I valori di ρ, μ e k sono stati calcolati utilizzando come riferimento $T_{film} = \frac{T_u + T_i}{2}$

Regime Turbolento $\rightarrow Re_D = \frac{\rho \omega D}{\mu} > 4000$

$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^n \rightarrow \begin{matrix} n = 0,4 \text{ (Riscaldamento del fluido)} \\ n = 0,3 \text{ (Raffreddamento del fluido)} \end{matrix}$

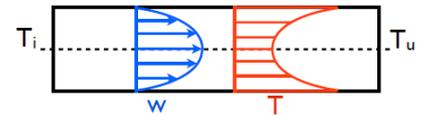


Perdite di carico

Misurando la pressione all'ingresso e all'uscita del fluido si nota una perdita di carico, ovvero una differenza tra il valore di pressione in ingresso ed in uscita. Tuttavia tale variazione di pressione è irrilevante ai fini del calcolo dell'entalpia "h". Dal punto di vista fisico tali perdite di carico sono dovute dall'attrito del fluido.

• **Regime laminare**

Equazione del profilo di velocità $\rightarrow w(r) = 2 \cdot \omega_m \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$



Attraverso la conservazione della quantità di moto è noto che $\tau = -\mu \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} = -2 \cdot \mu \cdot \omega_m \cdot \left(-\frac{2r}{R^2}\right)$

Lo sforzo massimo si ha quando $r = R$, ovvero all'interfaccia tra fluido e tubo $\rightarrow \tau_{max} = 8 \cdot \mu \cdot \frac{\omega_m}{D}$

In questo punto anche la derivata della velocità del fluido è massima

Definizione di sforzo a prescindere dalle proprietà geometriche $\rightarrow \tau = C_f \cdot \rho \cdot \frac{\omega_m^2}{2}$

$$\begin{cases} \tau_{max} = C_f \cdot \rho \cdot \frac{\omega_m^2}{2} \rightarrow C_f = 8\mu \frac{\omega_m}{D} \cdot \frac{2}{\rho \cdot \omega_m^2} \rightarrow C_f = \frac{16}{Re} \\ \tau_{max} = 8 \cdot \mu \cdot \frac{\omega_m}{D} \end{cases}$$

Il fluido tende a trascinare il tubo \rightarrow Forza di drag (il fluido viene frenato dal tubo bloccato)

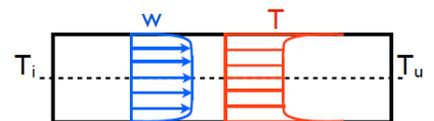
$\Delta p \cdot \text{Sezione} = \tau \cdot \text{Superficie Tubo} \rightarrow \begin{matrix} \Delta p \cdot \text{Sezione} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \rho \cdot \frac{\omega_m^2}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \\ \tau \cdot \text{Superficie Tubo} = C_f \cdot \rho \cdot \frac{\omega_m^2}{2} \cdot \pi \cdot D \cdot L \end{matrix} \rightarrow f_{laminare} = 4 \cdot C_f = \frac{64}{Re}$

• **Regime turbolento**

In generale vale la seguente relazione $\rightarrow \Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \rho \cdot \frac{\omega_m^2}{2}$

Tubi lisci $\rightarrow f_{turbolento} \text{ (liscio)} = 0,184 \cdot Re^{-0,2}$

Tubi scabri \rightarrow Abaco di Moody



Nel caso del regime laminare la rugosità non ha alcun effetto sul profilo di velocità del fluido, mentre in quello turbolento si

Anche se diminuisce il valore di $f \rightarrow$ La perdita di carico, al variare della velocità, cresce

$f \propto \frac{1}{Re^{0,2}} \propto \frac{1}{\omega_m^{0,2}} \rightarrow$ Siccome $\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \rho \cdot \frac{\omega_m^2}{2} \rightarrow \Delta p \propto \omega_m^{1,8}$

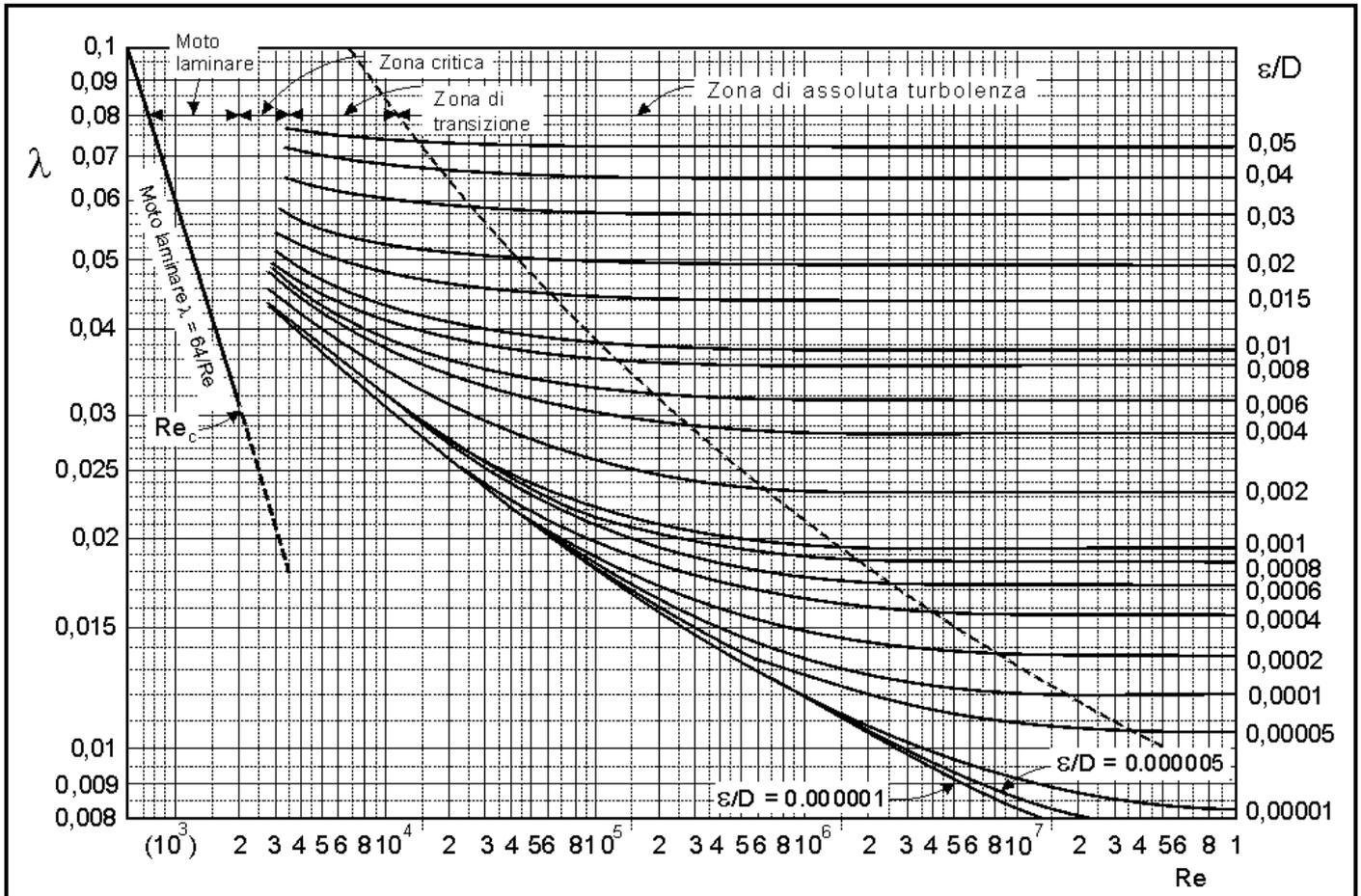
Dunque al crescere di Re si hanno perdite di carico significative

Dal punto di vista termico è più conveniente operare in **regime turbolento** perchè il valore di **Nu** è **maggiore**
 \rightarrow Quindi anche **h** è **maggiore**

In **regime turbolento** è necessario utilizzare tubi della miglior qualità possibile (lisci) al fine di ridurre perdite di carico

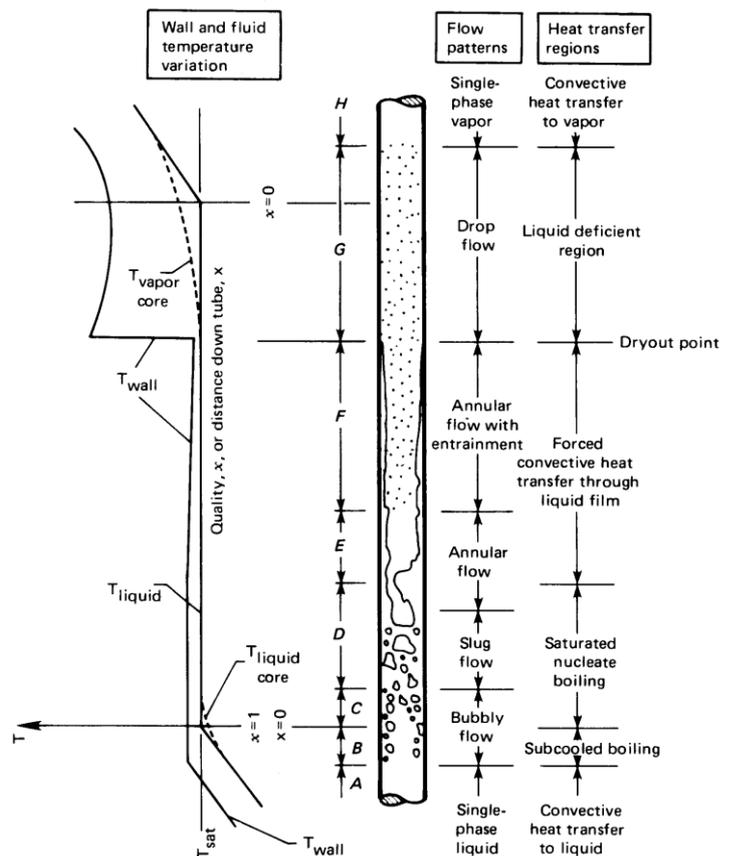
Un vantaggio del **regime turbolento** è la possibilità di **stimare in maniera più precisa i profili** di velocità e temperatura

Abaco di Moody



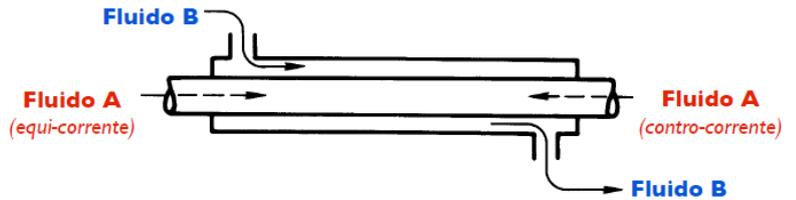
Convezione interna con transizione di fase

Nei generatori di vapore, spesso, le tubazioni sono poste in verticale per sfruttare gli **effetti di galleggiamento** del vapore rispetto al liquido. Si consideri quindi il tubo rappresentato a lato: dall'estremità inferiore entra dell'acqua allo stato liquido e tutto il tubo è caratterizzato da una potenza termica entrante. Gradualmente cominciano a generarsi delle bolle che determinano diversi regimi di moto: prima si ha un **moto a bolle**, poi un **moto a tappi** (blocchi di vapore), successivamente un **moto anulare** (il liquido è sul bordo ed all'interno vi è il gas), un **moto anulare con trascinamento di acqua** (il liquido è sul bordo ma all'interno del gas vi sono goccioline di acqua) ed infine un **flusso gassoso con goccioline d'acqua sospese**. Finché il liquido è a contatto con la parete la differenza di temperatura è molto contenuta ed è sufficiente, durante il passaggio di stato che avviene a temperatura costante, a scambiare una quantità elevata di potenza. Ne consegue, dalla legge di Newton, che il valore del coefficiente di scambio termico (h) è elevato. Nel momento in cui non si ha più il passaggio di stato la trasmissione della potenza termica avviene per conduzione: tuttavia il vapore ha un coefficiente di scambio termico (h) molto basso e per garantire una certa potenza termica scambiata si ha un'elevata differenza di temperatura tra fluido e tubo. A livello tecnologico questo fenomeno, chiamato **Dryout**, è un problema non di poco conto, visto che esso si può manifestare in una zona variabile lungo il tubo generando stress termico e quindi fatica. Per evitare questo problema viene utilizzato un serbatoio ausiliario così da **evitare la completa transizione di fase** all'interno del tubo e garantire la presenza di liquido lungo le pareti.



Gli scambiatori di calore

Un generico scambiatore di calore può essere rappresentato come segue, ovvero composto da un tubo al cui interno scorre un fluido "A" e che si trova a sua volta all'interno di un ulteriore tubo in cui circola un fluido "B". Le due sostanze non sono a contatto, quindi non si mescolano tra di loro, ma presentano uno scambio termico tramite la superficie del tubo interno. Negli scambiatori reali, a differenza del caso ideale appena descritto, vi sono però "n" tubi anziché due. Tuttavia è utile studiare il caso ideale al fine di poter estendere le relative conclusioni a geometrie differenti.



Scambiatore di calore → **Scambiatore equi – corrente** → Verso Fluido A = Verso Fluido B
 → **Scambiatore contro – corrente** → Verso Fluido A ≠ Verso Fluido B

T_{Min} del fluido B si presenta accanto alla T_{Max} del fluido A, mentre la T_{Max} del fluido B si presenta accanto alla T_{Min} del fluido A → **Equi – corrente**
 T_{Max} del fluido B si presenta accanto alla T_{Max} del fluido A, mentre la T_{Min} del fluido B si presenta accanto alla T_{Min} del fluido A → **Contro – corrente**

Bilancio di massa

$$\dot{m}_f = \rho_f \cdot \omega_f \cdot A_f \cdot N_{tubi}$$

$$\dot{m}_c = \rho_c \cdot \omega_c \cdot A_c$$

Bilancio di energia – Gas ideale o liquido ideale (con P = costante o perdite di carico limitate)

$$\dot{Q}(Entrante) = \dot{m}_f \cdot C_{p,f} \cdot (T_{f,out} - T_{f,in})$$

$$\dot{Q}(Uscente) = -\dot{m}_c \cdot C_{p,c} \cdot (T_{c,out} - T_{c,in})$$

Al fine di poter ottenere delle informazioni circa la geometria di uno scambiatore di calore è necessario studiare lo scambio termico, che dipende dalla superficie effettiva di scambio.

Profili di temperatura

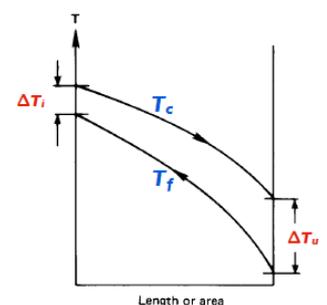
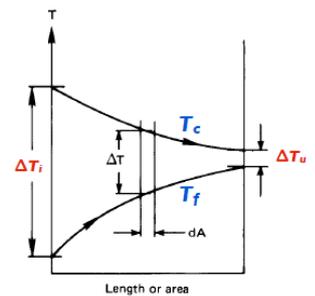
Il caso equi-corrente vede i fluidi entrare dallo stesso lato dello scambiatore di calore. In particolare, il fluido freddo avrà una temperatura di ingresso minima ed aumenterà gradualmente fino a raggiungere la temperatura di uscita massima. Viceversa, il fluido caldo avrà una temperatura di ingresso massima e diminuirà gradualmente fino a raggiungere la temperatura di uscita minima.

$$\text{Nota che } \dot{q}(x) \propto (T_c - T_f)$$

Lo scambio termico all'istante t_1 è maggiore rispetto allo scambio termico all'istante t_2 → Con $t_2 > t_1$

La derivata della differenza di temperatura si riduce e di conseguenza anche lo scambio termico

Il caso contro-corrente vede i fluidi entrare dai lati opposti dello scambiatore di calore. Come nel caso precedente, il fluido freddo avrà una temperatura di ingresso minima ed aumenterà gradualmente fino a raggiungere la temperatura di uscita massima. Viceversa, il fluido caldo avrà una temperatura di ingresso massima e diminuirà gradualmente fino a raggiungere la temperatura di uscita minima. Dai grafici riportati a lato, però, si evince che nel caso contro-corrente il liquido freddo raggiunge una temperatura di uscita maggiore rispetto alla temperatura di uscita del liquido caldo, cosa che non avviene nel caso equi-corrente. Quindi nella configurazione equi-corrente la massima temperatura raggiungibile per il fluido freddo è ben inferiore rispetto alla temperatura iniziale del fluido caldo, mentre nella configurazione contro-corrente la massima temperatura raggiungibile per il fluido freddo è prossima alla temperatura iniziale del fluido caldo.



$$\begin{cases} \dot{Q}_{out} = -\dot{m}_c \cdot C_{p,c} \cdot (T_{c,out} - T_{c,in}) \\ \dot{Q}_{in} = \dot{m}_f \cdot C_{p,f} \cdot (T_{f,out} - T_{f,in}) \end{cases}$$

$$\text{In forma differenziale} \rightarrow \begin{cases} \delta \dot{Q}_{out} = -\dot{m}_c \cdot C_{p,c} \cdot dT_c \\ \delta \dot{Q}_{in} = \dot{m}_f \cdot C_{p,f} \cdot dT_f \text{ (equi - corrente)} \\ \delta \dot{Q}_{in} = -\dot{m}_f \cdot C_{p,f} \cdot dT_f \text{ (contro - corrente)} \end{cases}$$

N. B. In corrispondenza della maggiore differenza di temperatura (ΔT) si ha derivata massima.

Si consideri uno scambiatore di calore composto da un tubo, in cui scorre un fluido caldo, posizionato all'interno di un tubo cavo, le cui pareti contengono un liquido freddo. Lo scambio termico complessivo è caratterizzato da tre processi: convezione tramite fluido freddo, convezione tramite fluido caldo e conduzione attraverso le pareti del tubo.

Per definire lo scambio termico si utilizza l'equivalente della legge di Newton → $\delta \dot{Q} = U \cdot (T_c - T_f) \cdot dA = U \cdot (T_c - T_f) \cdot (2\pi R \cdot dx)$

U = Coefficiente globale di scambio termico

$$R_{tot} = \frac{1}{U \cdot A} = \sum R_i$$

Nel caso in esame si ha che **U = Somma degli effetti di h_f , h_c e conducibilità del tubo**

ΔT medio logaritmico

Noto che la differenza di temperatura sia l'origine dello scambio termico cerco di ottenere il valore di quest'ultimo dalle relazioni soprariportate.

$$dT_c - dT_f = d(T_c - T_f) = -\delta\dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_c \cdot C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f \cdot C_{p,f}} \right), \text{Scambiatore equicorrente}$$

$$dT_c - dT_f = d(T_c - T_f) = -\delta\dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_c \cdot C_{p,c}} - \frac{1}{\dot{m}_f \cdot C_{p,f}} \right), \text{Scambiatore controcorrente}$$

$$\text{Siccome si ha che } \delta\dot{Q} = U \cdot (T_c - T_f) \cdot dA$$

$$d(T_c - T_f) = -U \cdot (T_c - T_f) \cdot dA \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_c \cdot C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f \cdot C_{p,f}} \right) \rightarrow \frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = -U \cdot dA \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_c \cdot C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f \cdot C_{p,f}} \right), \text{Scambiatore equicorrente}$$

$$d(T_c - T_f) = -U \cdot (T_c - T_f) \cdot dA \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_c \cdot C_{p,c}} - \frac{1}{\dot{m}_f \cdot C_{p,f}} \right) \rightarrow \frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = -U \cdot dA \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_c \cdot C_{p,c}} - \frac{1}{\dot{m}_f \cdot C_{p,f}} \right), \text{Scambiatore controcorrente}$$

$$-\ln \frac{\Delta T_u}{\Delta T_i} = U \cdot A \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_c \cdot C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f \cdot C_{p,f}} \right), \text{Scambiatore equicorrente}$$

$$-\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_u} = U \cdot A \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_c \cdot C_{p,c}} - \frac{1}{\dot{m}_f \cdot C_{p,f}} \right), \text{Scambiatore controcorrente}$$

Con $\dot{Q} = \dot{m}_f \cdot C_{p,f} \cdot (T_{f,out} - T_{f,in})$ e che $\dot{Q} = -\dot{m}_c \cdot C_{p,c} \cdot (T_{c,out} - T_{c,in}) \rightarrow$

$$\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_u} = U \cdot A \cdot \left(\frac{-\Delta T_c}{\dot{Q}} + \frac{\Delta T_f}{\dot{Q}} \right), \text{Scambiatore equicorrente}$$

$$\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_u} = U \cdot A \cdot \left(\frac{-\Delta T_c}{\dot{Q}} - \frac{\Delta T_f}{\dot{Q}} \right), \text{Scambiatore controcorrente}$$

$$\dot{Q} = U \cdot A \cdot \frac{-\Delta T_c + \Delta T_f}{\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_u}}, \text{Scambiatore equicorrente}$$

$$\dot{Q} = U \cdot A \cdot \frac{-\Delta T_c - \Delta T_f}{\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_u}}, \text{Scambiatore controcorrente}$$

Osservando i due grafici relativi agli andamenti delle temperature dei fluidi si possono ottenere le seguenti uguaglianze

Scambiatore equi-corrente	Scambiatore controcorrente
<p style="text-align: center;">Length or area</p>	<p style="text-align: center;">Length or area</p>
$-\Delta T_c + \Delta T_f = (-T_{c,out} + T_{c,in}) + (T_{f,out} - T_{f,in}) = \Delta T_i - \Delta T_u$	$-\Delta T_c - \Delta T_f = (-T_{c,out} + T_{c,in}) - (T_{f,out} - T_{f,in}) = \Delta T_i - \Delta T_u$

$$\text{In ogni caso (sia equicorrente che controcorrente)} \rightarrow \dot{Q} = U \cdot A \cdot \frac{\Delta T_i - \Delta T_u}{\ln \frac{\Delta T_i}{\Delta T_u}} = U \cdot A \cdot \Delta T_{ml}$$

N.B. Le relazioni ottenute sono valide se sono rispettate le due condizioni impostate all'inizio \rightarrow Gas o liquido ideale
 ΔP trascurabili

Calcolo di U

Nel caso in esame lo scambiatore ha una struttura tale per cui il liquido caldo si trova all'interno e quindi la potenza termica viene scambiata radialmente, attraverso i fluidi ed il tubo, verso l'esterno.

Scambio termico convettivo all'interno tubo (h_i) → Scambio termico per conduzione (k) → Scambio termico convettivo all'esterno del tubo (h_e)

I valori di h_i ed h_e si ottengono attraverso il seguente procedimento: **Reynolds** → **Prandtl** → **Nusselt** → **h**

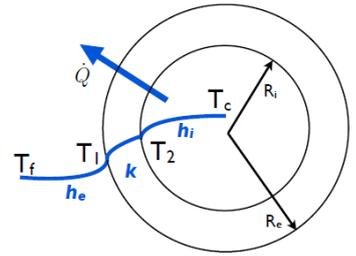
N.B. Non avendo una geometria ben definita risulta essere più complesso calcolare h_e

Siccome la potenza termica rimane invariata rispetto all'origine

$$\dot{Q} = U_i \cdot A_i \cdot \Delta T_{ml} = U_e \cdot A_e \cdot \Delta T_{ml}$$

Noto che $A_i^{tubo} = \pi \cdot D_i \cdot L$ e $A_e^{tubo} = \pi \cdot D_e \cdot L \rightarrow A_i^{tubo} \cdot N_{tubi} = A_i$ ed $A_e^{tubo} \cdot N_{tubi} = A_e$

$$R_{tot}^{tubo} = \frac{1}{U_i \cdot A_i^{tubo}} = \frac{1}{U_e \cdot A_e^{tubo}}$$



R_{tot}^{tubo} = Termine scambio convettivo interno + Termine scambio per conduzione + Termine scambio convettivo esterno

$$R_{tot}^{tubo} = \frac{1}{h_i \cdot A_i^{tubo}} + \frac{\ln \frac{D_e}{D_i}}{2\pi \cdot k \cdot L} + \frac{1}{h_e \cdot A_e^{tubo}} \rightarrow \frac{1}{U_i \cdot A_i^{tubo}} = \frac{1}{h_i \cdot A_i^{tubo}} + \frac{\ln \frac{D_e}{D_i}}{2\pi \cdot k \cdot L} + \frac{1}{h_e \cdot A_e^{tubo}} \rightarrow \frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + \frac{D_i \cdot \ln \frac{D_e}{D_i}}{2k} + \frac{1}{h_e} \cdot \frac{D_i}{D_e}$$

L'espressione ottenuta dipende prevalentemente dalle dimensioni dei diametri → U è specifico alla superficie di scambio
 h si calcola con le opportune correlazioni

Fissare il valore del diametro è fondamentale → Conoscendo il valore del diametro si calcola $Re_D = \frac{\rho \omega D_i}{\mu}$

Stabilita la portata massica $\dot{m}_{tubo} = \rho \omega \pi \cdot \frac{D^2}{4}$ è possibile calcolare la velocità ω per il calcolo di Re_D

Nello specifico è nota la portata massica totale $\dot{m}_{tot} = \dot{m}_{tubo} \cdot N_{tubi}$

In base alle necessità è possibile modificare la struttura dello scambiatore in modo che vi sia regime turbolento o laminare

Noti Re_D e Pr si ottiene Nu → Di conseguenza si ottiene h

N.B. Esistono diverse situazioni in fase di progettazione. Potrebbe essere imposto un determinato diametro dei tubi e quindi per variare il regime di operatività è necessario intervenire sulla velocità del fluido e quindi sulla portata, ovvero il numero di tubi, oppure viceversa.

Layout complessi

Al fine di poter estendere queste considerazioni anche a scambiatori di calore aventi layout più complessi è stato introdotto il fattore correttivo (F), i cui valori sono ricavati attraverso dati sperimentali ed associati ai parametri P ed R.

$$P = \frac{T_{Tubo,Out} - T_{Tubo,In}}{T_{Guscio,In} - T_{Tubo,In}} \quad R = - \frac{T_{Caldo,Out} - T_{Caldo,In}}{T_{Freddo,Out} - T_{Freddo,In}}$$

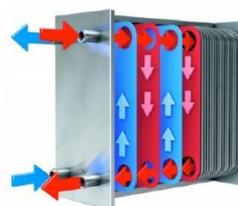
F = Fattore correttivo = $F(P, R)$

$$\Delta T_{ml,c} = F \cdot \Delta T_{ml}$$

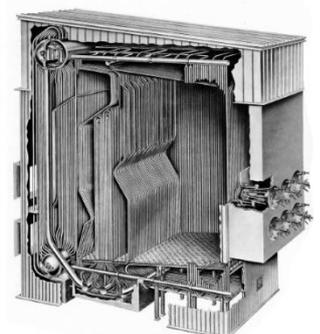
$\dot{Q} = U \cdot A \cdot \Delta T_{ml}$ → Si noti che U ed A dipendono dalle proprietà dello scambiatore mentre ΔT_{ml} dal modo in cui viene alimentato

$\Delta T_{ml} = \Delta T_i - \Delta T_u$ → Scambiatore equi – corrente → $\Delta T_i \gg \Delta T_u$
 Scambiatore contro – corrente → ΔT_i confrontabile rispetto a ΔT_u

Scambiatori a piastre



Generatori di vapore



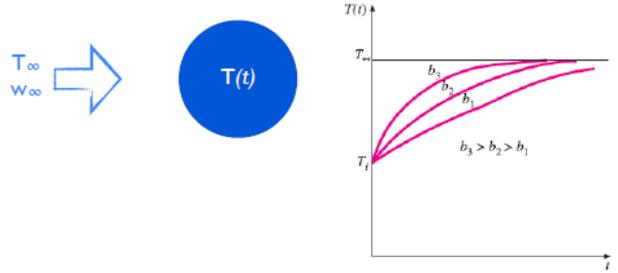
Esempi di scambiatori di calore → Scambiatori a piastre
 Generatori di vapore



Lezione dell'1 dicembre 2021

Condizioni non stazionarie

In condizioni non stazionarie si assume che non vi sono gradienti di temperatura all'interno del corpo al fine di evitare una distribuzione tridimensionale della temperatura. Ipotizzando che la temperatura iniziale (T_i) del corpo sia inferiore alla temperatura del fluido in condizioni indisturbate (T_∞), l'incremento della temperatura del corpo nel tempo è di tipo asintotico. La dinamica dipende dalle condizioni in cui avviene lo scambio termico: alcune proprietà del corpo come la massa ed il calore specifico hanno un'influenza sul valore della temperatura, ma anche il coefficiente di scambio termico convettivo. Per analizzare questo problema è necessario partire dal bilancio energetico del corpo.



$$\dot{Q}_{Conv}(Ingresso) = \frac{dU}{dt} \rightarrow \text{Con gradiente di temperatura nel corpo nullo} \rightarrow -h \cdot A \cdot (T - T_\infty) \cdot dt = m \cdot C \cdot dT$$

$$\text{In forma integrale} \rightarrow T = T_\infty + (T_i - T_\infty) \cdot e^{-\frac{h \cdot A}{m \cdot C} t} \rightarrow \begin{matrix} t_0 = 0 \rightarrow T_i \\ t = \text{Generico} \rightarrow T \end{matrix}$$

Attraverso la relazione appena ottenuta si evince che all'aumentare del valore di $t \rightarrow T \cong T_\infty$

N.B. In generale, maggiore è il valore di $b = \frac{h \cdot A}{m \cdot C}$, minore sarà il tempo tale per cui $T \cong T_\infty$

• **Validità ipotesi – Gradiente di temperatura nel corpo nullo**

Tuttavia è necessario comprendere quando può essere ritenuta valida, o meno, l'ipotesi relativa al gradiente di temperatura nel corpo nullo. Il fattore che stabilisce, o meno, la validità dell'ipotesi soprariportata è il gruppo adimensionale Biot.

$$Biot = \frac{h \cdot L}{k_{Corpo}} \quad \text{Se } Biot < 0,1, \text{ allora il gradiente di } T \text{ nel corpo è trascurabile}$$

N.B. La differenza tra il gruppo adimensionale Biot ed il gruppo adimensionale Nusselt risiede nelle grandezze considerate, in particolare il gruppo adimensionale Nusselt non include alcuna informazione circa il corpo immerso nel fluido.

$$Biot = \frac{h \cdot L}{k_{Corpo}} \quad Nusselt = \frac{h \cdot L}{k_{Fluido}}$$

Il calore trasmesso, per convezione, dal fluido alla superficie del corpo è lo stesso che viene trasmesso per conduzione all'interno del corpo

$$\dot{Q}_{Conduzione} = \dot{Q}_{Convezione} \rightarrow \begin{cases} \dot{Q}_{Conduzione} = -k_{Corpo} \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \\ \dot{Q}_{Convezione} = h \cdot A \cdot (T - T_\infty) \end{cases} \rightarrow -k_{Corpo} \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} = h \cdot A \cdot (T - T_\infty) \rightarrow \frac{h}{k_{Corpo}} = \frac{\frac{dT}{dx}}{T_\infty - T}$$

$$Biot = \frac{h \cdot L}{k_{Corpo}} = \frac{\frac{dT}{dx} \cdot L}{T_\infty - T} = \frac{\text{Variazione di } T \text{ nel solido}}{\text{Differenza di } T \text{ tra solido e fluido}}$$

Risulta essere molto importante, anche per semplificare le operazioni di calcolo, verificare il valore di Biot lungo tutte le componenti di un corpo.

Esempio \rightarrow $Bi_x = \frac{h \cdot L_x}{k} > 0,1$
 $Bi_y = \frac{h \cdot L_y}{k} < 0,1$ \rightarrow Il gradiente di T non è trascurabile in x ma solo in y e z
 $Bi_z = \frac{h \cdot L_z}{k} < 0,1$

Alettatura

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + \frac{D_i \cdot \ln \frac{D_e}{D_i}}{2k} + \frac{1}{h_e} \cdot \frac{D_i}{D_e} \rightarrow \text{Le due resistenze convettive } \left(\frac{1}{h_i} \text{ ed } \frac{1}{h_e} \cdot \frac{D_i}{D_e} \right) \text{ hanno maggiore rilevanza rispetto a quella conduttiva } \left(\frac{D_i \cdot \ln \frac{D_e}{D_i}}{2k} \right)$$

L'energia interna (U_i) è una grandezza specifica alla superficie del tubo che non dipende dalla lunghezza

Nel caso in cui il valore h_e fosse molto basso, allora la resistenza convettiva $\left(\frac{1}{h_e} \cdot \frac{D_i}{D_e} \right)$ sarebbe molto alta

La soluzione a questo problema risiede nella forma estesa della resistenza totale

$$R_{tot}^{tubo} = \frac{1}{h_i \cdot A_i^{tubo}} + \frac{\ln \frac{D_e}{D_i}}{2\pi \cdot k \cdot L} + \frac{1}{h_e \cdot A_e^{tubo}} \rightarrow \frac{1}{U_i \cdot A_i^{tubo}} = \frac{1}{h_i \cdot A_i^{tubo}} + \frac{\ln \frac{D_e}{D_i}}{2\pi \cdot k \cdot L} + \frac{1}{h_e \cdot A_e^{tubo}}$$

Se h_e è basso si può compensare il valore della resistenza conduttiva esterna aumentando la superficie A_e^{tubo} tramite alettatura

- **Approccio semplificato**

Nell'approccio semplificato l'effetto dell'alettatura viene rappresentato dal fattore moltiplicativo Z

$$\text{Alettatura esterna} \rightarrow Z_e = \frac{A_{e,h}^{tubo}}{A_e^{tubo}} = \frac{A_{e,h}^{tubo}}{\pi \cdot D_e \cdot L}$$

$$\text{Alettatura interna} \rightarrow Z_i = \frac{A_{i,h}^{tubo}}{A_i^{tubo}} = \frac{A_{i,h}^{tubo}}{\pi \cdot D_i \cdot L}$$

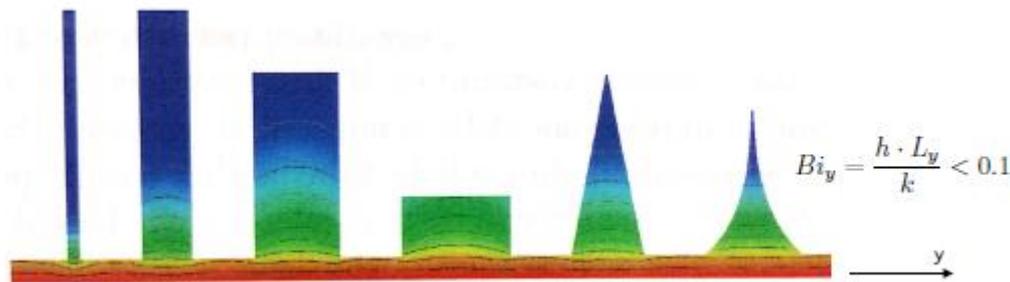
$$\frac{1}{U_i \cdot A_i^{tubo}} = \frac{1}{h_i \cdot A_i^{tubo} \cdot Z_i} + \frac{\ln \frac{D_e}{D_i}}{2\pi \cdot k \cdot L} + \frac{1}{h_e \cdot A_e^{tubo} \cdot Z_e} \rightarrow \frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i \cdot Z_i} + \frac{D_i \cdot \ln \frac{D_e}{D_i}}{2k} + \frac{1}{h_e \cdot Z_e} \cdot \frac{D_i}{D_e}$$

$$\frac{1}{U_e \cdot A_e^{tubo}} = \frac{1}{h_i \cdot A_i^{tubo} \cdot Z_i} + \frac{\ln \frac{D_e}{D_i}}{2\pi \cdot k \cdot L} + \frac{1}{h_e \cdot A_e^{tubo} \cdot Z_e} \rightarrow \frac{1}{U_e} = \frac{1}{h_i \cdot Z_i} \cdot \frac{D_e}{D_i} + \frac{D_e \cdot \ln \frac{D_e}{D_i}}{2k} + \frac{1}{h_e \cdot Z_e}$$

N.B. L'energia interna (U_i) è una grandezza specifica alla superficie geometrica del tubo, quindi Z è matematicamente un moltiplicatore di h

Tuttavia questo approccio presenta dei limiti, due in particolare: la **variazione di "h"** ed il **gradiente di temperatura superficiale dell'aletta**. Aggiungendo un profilo alettato ad un tubo vi è una conseguente variazione dello strato limite e non è scontato che le alette siano caratterizzate per intero da una temperatura uniforme.

Distribuzione di temperatura della aletta



Nella rappresentazione soprariportata si evince che la distribuzione di temperatura di un'aletta è fortemente influenzata dalla geometria della stessa. Nella prima e nell'ultima aletta rappresentata in figura si osserva come il gradiente di temperatura orizzontale sia praticamente nullo, ciò significa quindi che $Bi_y = \frac{h \cdot L_y}{k} < 0,1$. Invece, nel caso della quarta aletta da sinistra, è possibile affermare che il gradiente di temperatura verticale è trascurabile, ovvero si ha che $Bi_x = \frac{h \cdot L_x}{k} < 0,1$. Si evidenzia, quindi, una maggiore efficienza nella distribuzione orizzontale della temperatura nel caso della prima e dell'ultima alette ed una maggiore efficacia nella distribuzione verticale della temperatura nella quarta aletta da sinistra. Questa capacità nel trasmettere potenza termica viene identificata tramite un parametro, ovvero l'efficienza dell'aletta.

$$\eta_{Aletta} = \frac{\dot{Q}_{Aletta}}{\dot{Q}_{Aletta,Max}} = \frac{\text{Potenza termica reale trasmessa dall'aletta}}{\text{Potenza termica ideale trasmessa dall'aletta}}$$

Ipotezzando che il valore di h non sia cambiato a seguito dell'alettatura $\rightarrow \dot{Q}_{Aletta,Max} = h \cdot A_{Aletta} \cdot (T_{Base} - T_{\infty})$
 $\dot{Q}_{Aletta} = \eta_{Aletta} \cdot \dot{Q}_{Aletta,Max} = \eta_{Aletta} \cdot h \cdot A_{Aletta} \cdot (T_{Base} - T_{\infty})$

Aletta con estremità isolata

Si consideri, inizialmente, una porzione di aletta avente spessore pari a δx in condizioni stazionarie e la potenza termica complessiva scambiata.

$$\delta Q = \text{Calore trasmesso per convezione dalla porzione di aletta avente spessore } \delta x$$

$$\rightarrow \delta Q = h \cdot (\text{Perimetro} \cdot \text{Spessore}) \cdot [T(x) - T_\infty]$$

Bilancio Energetico $\rightarrow Q_{out} - Q_{in} + \delta Q_{out} = 0$

$$\rightarrow -k_s \cdot A \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\delta x} + k_s \cdot A \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + h \cdot (\text{Perimetro} \cdot \delta x) \cdot (T - T_\infty)_x = 0$$

$$\frac{k_s \cdot A \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\delta x} - k_s \cdot A \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_x}{\delta x} = h \cdot \text{Perimetro} \cdot (T - T_\infty)_x$$

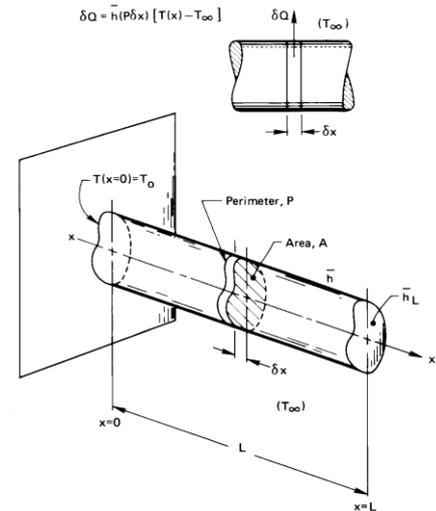
$$\text{Per } \delta x \text{ che tende a } dx \rightarrow \frac{d^2(T - T_\infty)}{dx^2} = \frac{h \cdot \text{Perimetro}}{k_s \cdot A} \cdot (T - T_\infty)$$

$$\text{Al fine di poter integrare per parti} \rightarrow \frac{d^2(T - T_\infty)}{(T - T_\infty)} = \frac{h \cdot \text{Perimetro}}{k_s \cdot A} \cdot dx^2$$

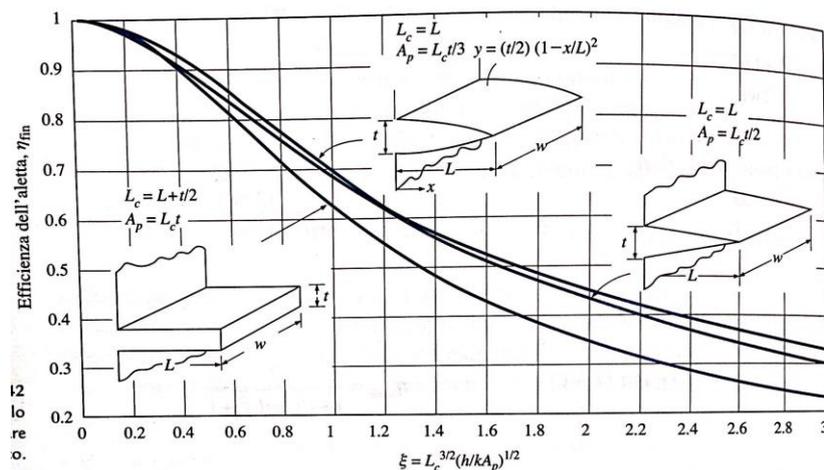
$$\rightarrow \text{Si noti che } \frac{\text{Perimetro} \cdot dx^2}{A} = \left[\frac{m \cdot m^2}{m^2} \right] = [m] = \text{Lunghezza}$$

$$\frac{h \cdot \text{Perimetro}}{k_s \cdot A} = \frac{h \cdot \text{Lunghezza}_{Aletta}}{k_s} \rightarrow \text{Equivale al Biot dell'aletta (Bi}_{Aletta}\text{)}$$

Il profilo della temperatura è proporzionale a Bi_{Aletta}



Efficienza dell'aletta



L'efficienza delle alette viene riportata, mediante diagrammi dedicati, in funzione di un parametro ξ proporzionale al biot dell'aletta (Bi_{Aletta}).

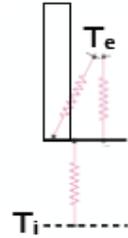
Per Biot bassi si ha una superficie specifica dell'aletta ridotta e quindi gradienti molto bassi \rightarrow **Rendimento elevato**

Per Biot alti si ha una superficie specifica dell'aletta elevata e quindi gradienti molto alti \rightarrow **Rendimento ridotto**

Quindi risulta essere fondamentale la scelta delle **dimensioni delle alette** al fine di ottenere un **rendimento adeguato**.

Resistenza aletta – Circuito elettrico equivalente

Considerando un tubo con alettatura esterna si evince che le alette non sono le uniche componenti del tubo a scambiare potenza termica, ma vi è anche la superficie del tubo che separa le alette. È possibile creare un circuito elettrico equivalente per descrivere la situazione in esame, in particolare la trasmissione della potenza termica viene rappresentata tramite una resistenza. Sul lato esterno vi sono due resistenze collegate in parallelo che rappresentano, rispettivamente, la trasmissione di potenza termica tramite l'aletta ed attraverso la superficie non alettata del tubo. Sul lato interno, invece, vi è un'unica resistenza convettiva che rappresenta lo scambio termico all'interno del tubo.



$$\text{Trascurando ogni resistenza conduttiva} \rightarrow \dot{Q}_{Tot} = \frac{\Delta T_{ml}}{R_{Conv,i} + R_{Conv,e}} = \frac{\Delta T_{ml}}{\frac{1}{h_i \cdot A_{Tubo}} + \frac{1}{h_{Base} \cdot (A_{Tubo} - A_{BaseAlette}) + \eta_f \cdot A_{Aletta} \cdot h_{Aletta}}}$$

Solitamente la superficie non alettata è molto minore rispetto alla superficie totale delle alette $\rightarrow h_{Base} \cdot (A_{Tubo} - A_{BaseAlette})$ è trascurabile

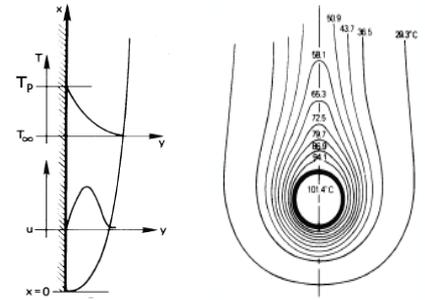
$$\text{In virtù di questa approssimazione} \rightarrow \dot{Q}_{Tot} = \frac{\Delta T_{ml}}{R_{Conv,i} + R_{Conv,e}} = \frac{\Delta T_{ml}}{\frac{1}{h_i \cdot A_{Tubo}} + \frac{1}{\eta_f \cdot A_{Aletta} \cdot h_{Aletta}}} = \frac{\Delta T_{ml}}{\frac{1}{h_i \cdot A_{Tubo}} + \frac{1}{\eta_f \cdot A_{Tubo} \cdot Z_e \cdot h_{Aletta}}}$$

$$\text{Generalmente l'alettatura è solamente esterna, ma può essere anche interna} \rightarrow \dot{Q}_{Tot} = \frac{\Delta T_{ml}}{\frac{1}{\eta_{f,i} \cdot A_{Tubo} \cdot Z_i \cdot h_i} + \frac{1}{\eta_{f,e} \cdot A_{Tubo} \cdot Z_e \cdot h_{Aletta}}}$$

$$\text{In generale, vale la seguente equazione} \rightarrow \frac{1}{U_i} = \frac{1}{\eta_{f,i} \cdot h_i \cdot Z_i} + \frac{D_i \cdot \ln \frac{D_e}{D_i}}{2k} + \frac{1}{\eta_{f,e} \cdot h_e \cdot Z_e} \cdot \frac{D_i}{D_e} \rightarrow \text{Se omissi, } \eta_{f,i} \text{ ed } \eta_{f,e} \text{ sono pari ad 1}$$

Convezione naturale

La convezione naturale differisce da quella forzata in quanto il moto macroscopico del fluido è indotto dalla presenza di un corpo caldo in presenza di un campo gravitazionale. Immergendo un corpo caldo nell'aria quest'ultima si riscalda e quindi si espande: tuttavia, essendo soggetta al campo gravitazionale ed avendo una densità inferiore, essa tenderà a muoversi verso l'alto a causa della forza di galleggiamento. In assenza di forza gravitazionale i profili di temperatura sarebbero perfettamente circolari e concentrici, ma nella realtà essi vengono deformati aumentando lo scambio termico. In un primo momento lo scambio termico avviene per conduzione ma, con l'aumento della temperatura ed il conseguente movimento dell'aria, esso avviene anche per convezione.



Si consideri una parete caratterizzata da una determinata temperatura (T_p) ed un fluido che scorre su di essa ad una temperatura (T_∞). Il contatto tra la superficie della parete ed il fluido genera un determinato profilo di temperatura ed un determinato profilo di velocità. Considerando un certo volume all'interno di un fluido soggetto a campo gravitazionale, se la massa contenuta all'interno di questo volume è inferiore alla massa contenuta a pari volume nel liquido esterno, tale volume è soggetto a forza di galleggiamento.

In termini macroscopici \rightarrow **Forza di galleggiamento** = $g \cdot \rho \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot V$

Con $K_p = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ si considera la variazione di volume associata alla variazione di temperatura

La forza di galleggiamento è determinata dal profilo di temperatura che, a sua volta, induce un certo profilo di velocità

Profilo di velocità \rightarrow **Indotto dal gradiente di temperatura**

N.B. La velocità è nulla in corrispondenza della superficie della parete ed al confine dello strato limite

- **Grashof**

Per il fenomeno della convezione naturale viene definito un nuovo gruppo adimensionale \rightarrow **Grashof (Gr)**

$$Gr = \frac{g \cdot \rho^2 \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot L^3}{\mu^2} = \frac{g \cdot \rho \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot L^3}{\frac{\mu^2}{\rho}}$$

Come riportato in precedenza $\rightarrow g \cdot \rho \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot L^3 =$ **Forza di galleggiamento**

Nella convezione naturale le forze dinamiche generate dal fenomeno stesso hanno lo stesso ordine di grandezza delle forze viscosse: tali forze, nel caso della convezione naturale, tendono a bilanciarsi reciprocamente.

$$Re = \frac{\rho \cdot \omega \cdot L}{\mu} \cong 1 \rightarrow \omega \cdot L = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Gr = \frac{g \cdot \rho \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot L^3}{\frac{\mu^2}{\rho}} \\ \omega \cdot L = \frac{\mu}{\rho} \end{array} \right. \rightarrow Gr = \frac{g \cdot \rho \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot L^3}{\mu \cdot (\omega \cdot L)} = \frac{g \cdot \rho \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot L^3}{\mu \cdot \left(\frac{\mu}{L}\right)} \rightarrow Gr = \frac{\text{Forze di Galleggiamento}}{\text{Forze Viscose}}$$

Gr è l'equivalente Re per la convezione naturale

Gr alto \rightarrow Convezione naturale significativa \rightarrow Le forze di galleggiamento prevalgono su quelle viscosse = Regime turbolento

Gr basso \rightarrow Convezione naturale ridotta \rightarrow Le forze viscosse prevalgono su quelle di galleggiamento

Al fine di poter **confrontare la convezione naturale con quella forzata** si valutano le forze di galleggiamento e quelle dinamiche

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{g \cdot \rho^2 \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot L^3}{\left(\frac{\rho \cdot \omega \cdot L}{\mu}\right)^2} \rightarrow \frac{Gr}{Re^2} = \frac{g \cdot \rho^2 \cdot K_p \cdot (T_\infty - T_p) \cdot L^3}{\rho^2 \cdot \omega^2 \cdot L^2} = \frac{\text{Forze di galleggiamento}}{\text{Forze dinamiche}}$$

N.B. Tali considerazioni, ovviamente, valgono se è definita una ω relativa ad un fluido indisturbato

Se $\frac{Gr}{Re^2} \ll 1 \rightarrow$ Domina la **convezione forzata** in quanto prevalgono le forze dinamiche $\rightarrow Nu = C \cdot Re^n \cdot Pr^m$

Se $\frac{Gr}{Re^2} \approx 1 \rightarrow$ Condizione di **convezione mista** in quanto le forze di galleggiamento e le forze dinamiche sono confrontabili

Se $\frac{Gr}{Re^2} \gg 1 \rightarrow$ Domina la **convezione naturale** in quanto prevalgono le forze di galleggiamento $\rightarrow Nu = C \cdot Gr^n \cdot Pr^m = C \cdot Ra^p$

N.B. Nel caso della convezione naturale i parametri "n" ed "m" sono confrontabili e quindi vale la seguente relazione: **Ra = Rayleigh = Gr · Pr**.

Lezione del 13 dicembre 2021

Irraggiamento

L'irraggiamento è un fenomeno fisico basato sullo scambio termico tramite radiazione elettromagnetica, le quali sono suddivise in virtù delle lunghezze d'onda: generalmente, minore è la lunghezza d'onda e maggiore sarà l'energia trasferita.

$$\text{Radiazione Termica (0,1 - 1000 } \mu\text{m)} = \text{L'effetto principale } \rightarrow \text{è trasferire calore} \rightarrow \begin{cases} \text{Luce Ultravioletta} = 3 - 400 \text{ nm} \\ \text{Luce Visibile} = 0,4 - 0,7 \mu\text{m} \\ \text{Radiazione Infrarossa Vicina} = 0,7 - 30 \mu\text{m} \\ \text{Radiazione Infrarossa Lontana} = 30 - 1000 \mu\text{m} \end{cases}$$

- **Riflessione a diverse λ**

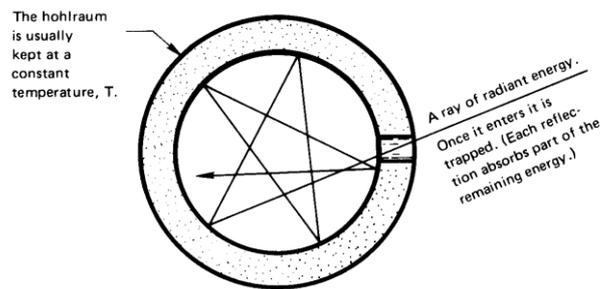
Alcuni corpi riflettono una quota della radiazione termica incidente. Si consideri, ad esempio, un corpo "colpito" da un fascio di luce visibile: esso riflette una frazione di questa luce incidente e quando vediamo un corpo caratterizzato da un certo colore significa che la frazione di luce riflessa ha la lunghezza d'onda tipica di tale colore.

- **Corpi opachi o trasparenti a diverse λ**

Un vetro è anche trasparente in quanto la radiazione visibile riesce a passare attraverso tale materiale. Un corpo può essere invece opaco, ovvero non permette il passaggio della radiazione visibile. Esistono, inoltre, corpi che possono essere opachi o trasparenti a determinate lunghezze d'onda: ad esempio, la maggior parte dei vetri sono trasparenti alla radiazione solare ma sono opachi alla radiazione infrarossa.

Corpo nero

Il corpo nero è un emettitore ed anche un assorbitore perfetto di onde per ogni lunghezza d'onda e per ogni direzione. La migliore approssimazione di un corpo nero è un corpo concavo, costituito generalmente da un materiale rugoso ad alto assorbimento, avente un piccolo foro che consente l'ingresso e la conseguente uscita di radiazioni. Ogni volta che la radiazione entrante "rimbalza" sulla superficie del corpo nero una piccola frazione della radiazione viene assorbita e ciò vale per tutte le lunghezze d'onda. Siccome il foro ha dimensioni molto ridotte rispetto alla superficie del corpo cavo, la radiazione uscente sarà minima.



Radiazione emessa dal corpo nero (Legge di Stefan – Boltzmann) $\rightarrow E_n(T) = \sigma \cdot T^4 = \text{Potenza emessa per unità di superficie}$

$$\sigma = \text{Costante di Stefan – Boltzmann} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

N.B. Tale legge è valida per il corpo nero, in quanto emette radiazioni in modo uniforme: ciò non avviene per i corpi reali.

Emissione del corpo nero

- **Emissione monocromatica (Legge di Plank)**

La radiazione emessa da un corpo nero viene chiamata "emissione monocromatica" e la densità di energia irradiata "spettro di corpo nero". La legge di Planck fornisce un'espressione dell'emissione del corpo nero per una specifica lunghezza d'onda che può essere rappresentata attraverso lo spettro di un corpo nero che ha una caratteristica forma a campana dipendente unicamente dalla sua temperatura T e non dalla materia che lo costituisce. Nello specifico sul grafico in esame vengono riportati i valori di emissione, di un corpo nero avente una determinata temperatura, in funzione della lunghezza d'onda. Inoltre è stato evidenziato, con due linee verticali, lo spettro visibile che è compreso tra 0,4 e 0,7 μm .

- **Luogo dei picchi di potenza (Legge di Wien)**

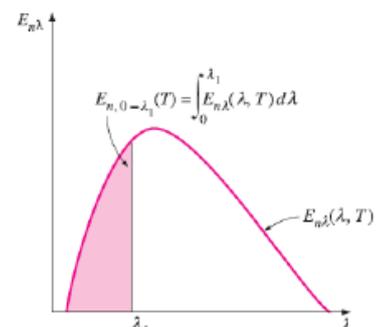
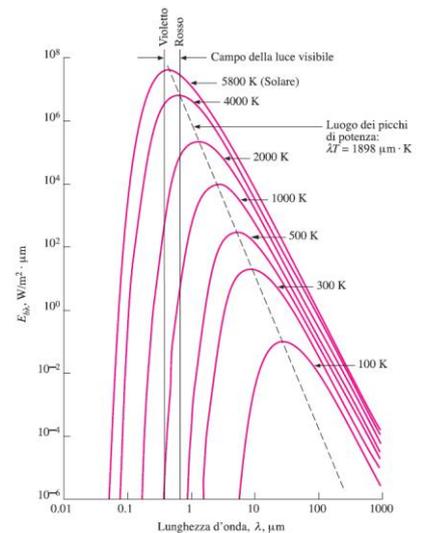
Un corpo nero ha un massimo di emissione, cioè emette più energia ad una ben determinata lunghezza d'onda. Il luogo dei picchi di potenza è regolato attraverso la legge di Wien: $(\lambda T)_{e_{\lambda=\text{Max}}} = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$. Il massimo dell'emissione monocromatica si sposta sempre più verso sinistra via via che la temperatura del corpo nero cresce.

- **Emissione totale con λ da 0 ad ∞ (Legge di Stefan-Boltzmann)**

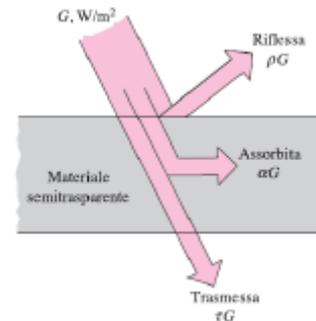
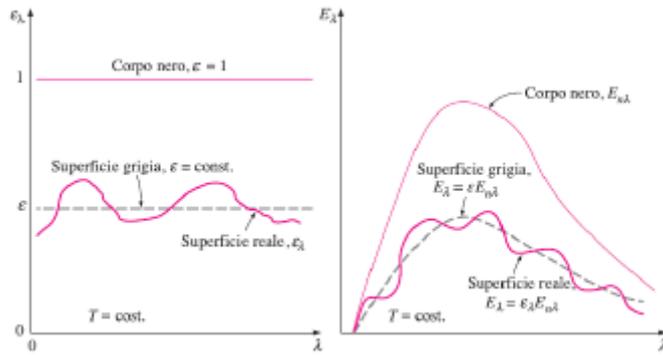
La legge di Stefan-Boltzmann può essere ricavata a partire dalla legge di Plank attraverso semplici passaggi matematici.

Emissione totale = Integrale dell'emissione monocromatica lungo tutto lo spettro

$$E_{n,0-\lambda_1}(T) = \int_0^{\lambda_1} E_{n\lambda}(\lambda, T) \cdot d\lambda \rightarrow E_n(T) = \sigma \cdot T^4$$



Emissione dei corpi reali



$$E_{\text{CorpiReali}} = \varepsilon \cdot E_{\text{CorpiNeri}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

L'emissività (ε) dipende dal materiale e dalla rugosità superficiale del corpo \rightarrow $\begin{cases} \text{Corpo Nero} \rightarrow \text{Emissività costante} \rightarrow \varepsilon = 1 \\ \text{Corpo Reale} \rightarrow \text{Emissività in funzione di } \lambda \rightarrow \varepsilon = f(\lambda, \theta) \\ \text{Corpo Grigio} \rightarrow \text{Emissività costante} \rightarrow \varepsilon = f(\lambda, \theta) \end{cases}$

Data una superficie costituita da un materiale semitrasparente vi è una radiazione incidente (G) che viene in parte riflessa (ρG), in parte assorbita (αG) e la restante parte viene trasmessa (τG).

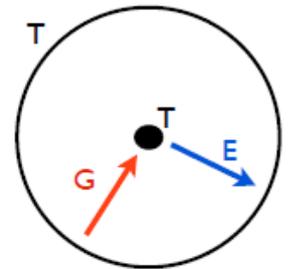
$$G = \rho G + \alpha G + \tau G \rightarrow 1 = \text{Coeff. Riflessione } (\rho) + \text{Coeff. Assorbimento } (\alpha) + \text{Coeff. Trasmissione } (\tau)$$

Legge di Kirchoff

Si consideri una sfera cava avente il medesimo comportamento di un corpo nero al cui interno vi è un corpo grigio di dimensioni relativamente inferiori. Posto che la temperatura del corpo grigio e della cavità del corpo nero siano uguali valgono le seguenti espressioni.

$$E_{\text{Cavità}} = E_{\text{CorpoNero}} = \sigma \cdot T^4 = G$$

$$E_{\text{CorpoInterno}} = E_{\text{CorpoGrigio}} = \varepsilon \cdot E_{\text{CorpoNero}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$



In condizioni di equilibrio termico della sfera si ha che la potenza netta uscente dalla sfera è nulla.

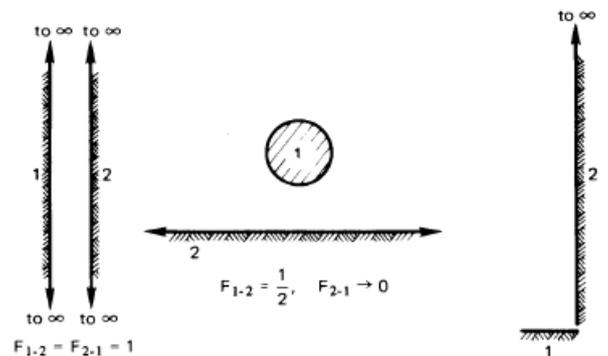
$$\dot{Q}_{\text{out,sfera}} = \text{Potenza termica riflessa} - \text{Potenza termica assorbita} \rightarrow \dot{Q}_{\text{out,sfera}} = E \cdot A - \alpha \cdot G \cdot A = 0$$

$$\dot{Q}_{\text{out,sfera}} = E \cdot A - \alpha \cdot G \cdot A = 0 \rightarrow \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot A - \alpha \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot A = 0 \rightarrow \varepsilon(T) = \alpha(T)$$

La legge di Kirchoff, relativa allo scambio di calore per irraggiamento, stabilisce che per una data lunghezza d'onda e a una data temperatura, che sia la temperatura di equilibrio termodinamico, i valori dell'assorbività e dell'emissività di un corpo sono uguali.

Fattori di vista

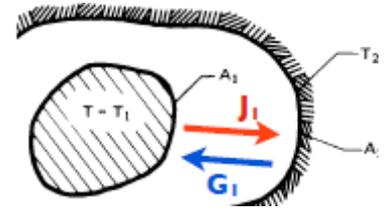
Per quantificare in modo accurato le diverse relazioni fra corpi radianti si introduce il concetto di **fattore di vista**: con riferimento a due corpi i e j , il fattore di vista $F_{i,j}$ è definito come la frazione di energia radiante che abbandona il corpo "i" e raggiunge il corpo "j". Per un corpo concavo è possibile definire anche il fattore $F_{i,i}$, definito come la frazione di energia radiante uscente dal corpo i che ricade su se stesso. In virtù di questa definizione il fattore di vista è una grandezza adimensionale variabile fra 0 e 1.



Irraggiamento tra corpi grigi

Si considerino due corpi grigi che interagiscono tra di loro. La **radiosità** (J_i) viene definita come il flusso di energia che contempla sia l'emissione che la riflessione del corpo e può essere espressa attraverso la seguente equazione.

$$J_i = \varepsilon_i \cdot E_{N,i} + \rho_i \cdot G_i$$



Se la superficie in esame è opaca si ha che la trasmissione è nulla $\rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \rho + \tau \\ \tau = 0 \end{cases} \rightarrow 1 = \alpha + \rho \rightarrow$ All'equilibrio $\rightarrow 1 = \varepsilon + \rho$

$$J_i = \varepsilon_i \cdot E_{N,i} + (1 - \varepsilon_i) \cdot G_i$$

- Potenza uscente dal corpo n°1**

$$\dot{Q}_{1,out} = \text{Potenza termica emessa} - \text{Potenza termica assorbita} = A_1 \cdot (\varepsilon_1 \cdot E_{N,1} - \alpha_1 \cdot G_1) = A_1 \cdot [\varepsilon_1 \cdot E_{N,1} + (\rho_1 - 1) \cdot G_1]$$

$$\dot{Q}_{1,out} = A_1 \cdot [(\varepsilon_1 \cdot E_{N,1} + \rho_1 \cdot G_1) - G_1] = A_1 \cdot (J_1 - G_1)$$

$$\text{Siccome } J_i = \varepsilon_i \cdot E_{N,i} + (1 - \varepsilon_i) \cdot G_i \rightarrow G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i \cdot E_{N,i}}{1 - \varepsilon_i}$$

$$\dot{Q}_{1,out} = A_1 \cdot (J_1 - G_1) = A_1 \cdot \left(J_1 - \frac{J_1 - \varepsilon_1 \cdot E_{N,1}}{1 - \varepsilon_1} \right) \rightarrow \dot{Q}_{1,out} = \frac{A_1 \cdot \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \cdot (E_{N,1} - J_1)$$

- Regola della reciprocità**

È possibile dimostrare che i due fattori di vista $F_{i,j}$ ed $F_{j,i}$ sono legati tra loro attraverso la regola della reciprocità.

$$A_i \cdot F_{i,j} = A_j \cdot F_{j,i}$$

$$\text{Potenza termica emessa dal corpo 1 ed assorbita dal corpo 2} = A_1 \cdot J_1 \cdot F_{1,2}$$

$$\text{Potenza termica emessa dal corpo 2 ed assorbita dal corpo 1} = A_2 \cdot J_2 \cdot F_{2,1}$$

$$\text{Ipotizzando che i due corpi siano neri si ha che } \varepsilon_1 \text{ ed } \varepsilon_2 \text{ sono pari ad } 1 \rightarrow \begin{cases} J_1 = E_{n,1} \\ J_2 = E_{n,2} \end{cases}$$

$$\text{Potenza termica netta uscente dal corpo 1} \rightarrow \dot{Q}_{1,2} = \text{Potenza termica da 1 a 2} - \text{Potenza termica da 2 ad 1} = A_1 \cdot J_1 \cdot F_{1,2} - A_2 \cdot J_2 \cdot F_{2,1}$$

$$\dot{Q}_{1,2} = A_1 \cdot E_{n,1} \cdot F_{1,2} - A_2 \cdot E_{n,2} \cdot F_{2,1}$$

Applicando la legge di Stefan – Boltzmann ed ipotizzando l'equilibrio termico

$$\dot{Q}_{1,2} = A_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4 \cdot F_{1,2} - A_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 \cdot F_{2,1} = 0 \rightarrow T_1 = T_2 \rightarrow A_1 \cdot F_{1,2} = A_2 \cdot F_{2,1}$$

$$\text{Potenza termica netta uscente dal corpo 1} = \text{Potenza termica da 1 a 2} - \text{Potenza termica da 2 ad 1} \rightarrow \dot{Q}_{1,2} = A_1 \cdot F_{1,2} \cdot (J_1 - J_2)$$

Equivalent elettrico – Due corpi grigi che formano una cavità

Si considerino due corpi grigi caratterizzati dalle seguenti caratteristiche e che, collegati tra loro, formano una cavità.

Corpo 1 (ε_1, A_1, T_1)

Corpo 2 (ε_2, A_2, T_2)

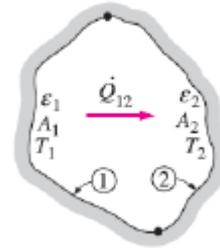
La potenza termica uscente dalla superficie 1 coincide con la potenza termica entrante nella superficie 2 in quanto corpo cavo

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{Q}_{1,out} = \dot{Q}_{2,in}$$

$$\dot{Q}_{1,out} = \frac{A_1 \cdot \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \cdot (E_{N,1} - J_1) \rightarrow \frac{\dot{Q}_{1,out}}{\frac{A_1 \cdot \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}} = (E_{N,1} - J_1)$$

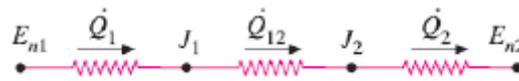
$$\dot{Q}_{2,in} = \frac{A_2 \cdot \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} \cdot (E_{N,2} - J_2) \rightarrow \frac{\dot{Q}_{2,in}}{\frac{A_2 \cdot \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}} = (J_2 - E_{N,2})$$

$$\dot{Q}_{1,2} = A_1 \cdot F_{1,2} \cdot (J_1 - J_2) \rightarrow \frac{\dot{Q}_{1,2}}{A_1 \cdot F_{1,2}} = (J_1 - J_2)$$



Parallelo elettrico → La differenza tra i flussi energetici = Differenza di potenziale (ΔV)
Potenze termiche = Corrente (i)

$\dot{Q}_{1-2} = \dot{Q}_{1,out} = \dot{Q}_{2,in}$ → Nel parallelo elettrico si ha che **la corrente è sempre la stessa** → Ciò si verifica in un circuito di **resistenze in serie**



$$R_1 = \frac{1}{\frac{A_1 \cdot \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}} = \frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \cdot \varepsilon_1} \rightarrow \text{Resistenza della superficie 1}$$

$$R_2 = \frac{1}{\frac{A_2 \cdot \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}} = \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \cdot \varepsilon_2} \rightarrow \text{Resistenza della superficie 2}$$

$$R_{1,2} = \frac{1}{A_1 \cdot F_{1,2}} \rightarrow \text{Resistenza legata alla geometria dei due corpi}$$

$$\frac{\dot{Q}_{1,out}}{\frac{A_1 \cdot \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}} = (E_{N,1} - J_1) \rightarrow \frac{\dot{Q}_{1,2}}{\frac{A_1 \cdot \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}} = (E_{N,1} - J_1)$$

$$\frac{\dot{Q}_{2,in}}{\frac{A_2 \cdot \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}} = (J_2 - E_{N,2}) \rightarrow \frac{\dot{Q}_{1,2}}{\frac{A_2 \cdot \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}} = (J_2 - E_{N,2})$$

$$\frac{\dot{Q}_{1,2}}{A_1 \cdot F_{1,2}} = (J_1 - J_2)$$

Sommando membro a membro è possibile ottenere anche l'equazione generale

$$\frac{\dot{Q}_{1,2}}{\frac{A_1 \cdot \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}} + \frac{\dot{Q}_{1,2}}{\frac{A_2 \cdot \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}} + \frac{\dot{Q}_{1,2}}{A_1 \cdot F_{1,2}} = (E_{N,1} - J_1) + (J_2 - E_{N,2}) + (J_1 - J_2) \rightarrow \dot{Q}_{1,2} \cdot \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \cdot \varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \cdot \varepsilon_2} + \frac{1}{A_1 \cdot F_{1,2}} \right) = E_{N,1} - E_{N,2}$$

$$\text{In generale} \rightarrow \dot{Q} \cdot R_{eq} = E_{N,1} - E_{N,2}$$

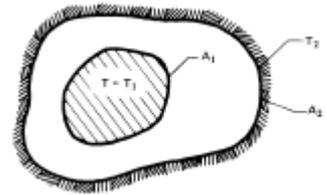
$$\text{Noto che } E_{N,1} - E_{N,2} = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \rightarrow \dot{Q}_{1,2} = \frac{\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \cdot \varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \cdot \varepsilon_2} + \frac{1}{A_1 \cdot F_{1,2}}}$$

Corpo convesso grigio all'interno di una cavità

Essa è una configurazione piuttosto frequente, tale per cui si ha che $F_{1,2} = 1$

Tutta l'emissione del corpo 1 colpisce il corpo 2

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1,2} = 1 \\ \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \\ \frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \cdot \epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \cdot \epsilon_2} + \frac{1}{A_1 \cdot F_{1,2}} \end{array} \right. \rightarrow \dot{Q}_{1,2} = \frac{\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \cdot \epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \cdot \epsilon_2} + \frac{1}{A_1}}$$



• Introduzione di uno schermo

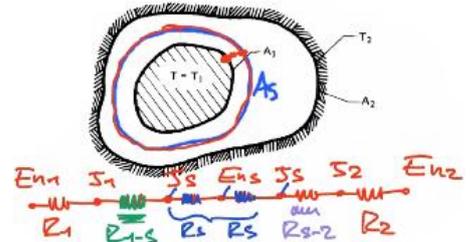
Al fine di poter aggiungere una o più resistenze vengono utilizzati gli schermi

Aggiungendo uno schermo tra il corpo grigio e la superficie interna del corpo cavo si ottiene quanto segue

$$\text{Con } F_{1,s} = F_{s,2} = 1 \rightarrow \dot{Q}_{1,2} = \frac{\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \cdot \epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \cdot \epsilon_2} + \frac{1}{A_1}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1 - \epsilon_s}{\epsilon_s \cdot A_s}\right) + \frac{1}{A_s}}$$

L'equivalente elettrico è un circuito di sei resistenze in serie

$$R_1 + R_{1,s} + R_s + R_s + R_{s,2} + R_2 = \frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \cdot \epsilon_1} + \frac{1}{A_1} + \frac{1 - \epsilon_s}{\epsilon_s \cdot A_s} + \frac{1 - \epsilon_s}{\epsilon_s \cdot A_s} + \frac{1}{A_s} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \cdot \epsilon_2}$$



Attraverso l'installazione di uno schermo sono state aggiunte tre resistenze → **Fissate T_1 e T_2 la potenza termica trasmessa è minore**

Lastre parallele

Due lastre parallele possono essere considerate allo stesso modo di una concavità, ovviamente trascurando gli effetti di bordo se sufficientemente estese. Logicamente ne consegue che le due superfici sono identiche e che il fattore di vista ($F_{1,2}$) è pari ad 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1,2} = 1 \\ A_1 = A_2 = A \\ \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \\ \frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \cdot \epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \cdot \epsilon_2} + \frac{1}{A_1 \cdot F_{1,2}} \end{array} \right. \rightarrow \dot{Q}_{1,2} = \frac{\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{A \cdot \epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{A \cdot \epsilon_2} + \frac{1}{A}} \rightarrow \dot{Q}_{1,2} = \frac{A}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\text{Nel caso delle lastre parallele} \rightarrow R_{eq} = \frac{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)}{A}$$

